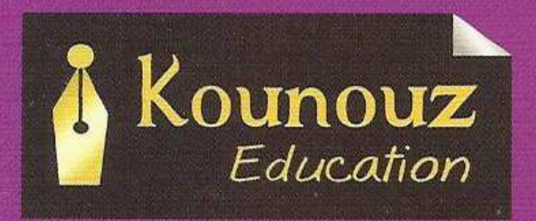


2ème

Deuxième année de l'enseignement secondaire

Kounouz Ennajeh

MATHEMATIQUES

- Résumés de Cours
- Exercices

Sections
Scientifiques





MATHÉMATIQUES
Section scientifiques

2ème Année

✦ ***Résumés***

✦ ***Exercices***

✦ ***Corrigé des exercices***

Abderrahmen Mimouni
Inspecteur Principale
de écoles préparatoires et des lycées secondaire

Sami Ben Rhim
Professeur de l'enseignement
Secondaires

Mohamed Ben Brahim
Professeur principale

Abdbasset Laataoui
Professeur Principale

© Kounouz Editions

Adresse : 123, Avenue Habib Thameur

Nabeul – 8000 Tunisie

Tél : (+216) 72 223 822

Fax : (+216) 72 223 922

E-mail : Kounouz.Edition@gnet.tn

Site Web : www.Kounouz-Edition.com

Avant-propos

✦ Ce manuel est conçu dont :

- la simplicité d'utilisation favorise le travail en autonomie de l'élève.
- l'accessibilité tient compte des attentes diverses des élèves.
- la variété des situations et des exercices permet de développer les notions.

✦ Chaque chapitre se décompose de la façon suivante :

- un résumé du cours écrit dans un langage simple, suivi d'un exemple et / ou d'une méthode pour mettre en pratique la notion.
- Des exercices dans quatre rubriques :

  ➯ ***QCM*** : permet de vérifier l'acquisition des savoirs et la maîtrise des savoir- faire.

  ➯ ***Appliquer*** : l'élève dispose ainsi en vis à- vis d'outils favorisant l'acquisition des savoirs et des savoir- faire.

  ➯ ***S'entraîner et se perfectionner*** : offrent des exercices dans lesquels sont mis en œuvre les diverses notions du chapitre dans une démarche plus approfondie ou en les associant à d'autres notions abordés précédemment. Leur nombre et leur variété permettent de répondre aux différents besoins des élèves.

Les auteurs

ALGÈBRE

Calculs dans IR

I) Résumé de cours

- ***Puissances :***

Pour tous réels non nuls a et b et tous entiers relatifs m et n on a :

$(a\times b)^n = a^n\times b^n$; $(a^n)^m = a^{n\times m}$; $a^n\times a^m = a^{n+m}$; $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

- ***Identités remarquables :***

Pour tous réels a et b on a :

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$; $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$;

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ et $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

- ***Radicaux :***

- Pour tout réel positif a, l'équation $x^2 = a$ admet pour solutions les réels $(-\sqrt{a})$ et $\sqrt{a}$.
- Pour tous réels positifs a et b on a, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$.
  $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ s'appelle **l'expression conjuguée** de $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.
- Pour tous réels positifs a et b et tout entier n on a, $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (avec $b\neq 0$) ; $\sqrt{a^n}=(\sqrt{a})^n$; et en particulier on a : $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a$.
- Pour tous réels a , $\sqrt{a^2}=|a|$.

- ***Inégalités, encadrement et valeur absolue :***

- Pour tous réels positifs a et b on a : $(a\leq b)$ équivaut à $(a^2\leq b^2)$
- Pour tous réels a et b non nuls et de même signe, si $(a<b)$ alors $(\frac{1}{b}<\frac{1}{a})$.
- Pour tous réels a et b on a, $(a\leq b)$ équivaut à $(-b\leq -a)$.
- Pour tous réels positifs a et b on a : $(a<b)$ équivaut à $(\sqrt{a}<\sqrt{b})$
- Etant des nombres réels a, b et c tels que $a<c$:

Si on a $(a\leq b\leq c)$, alors on dit que $(a\leq b\leq c)$ est un **encadrement** du réel b par les réels a et c.

- Soit x un réel. **La valeur absolue** de x est le <u>réel positif</u> noté $|x|$ qui est défini par : $|x|=x$ si $x\geq 0$ et $|x|=-x$ si $x\leq 0$.

- Si $a>1$ alors $1<\sqrt{a}<a<a^2$.

- Si $0<a<1$ alors $0<a^2<a<\sqrt{a}$.

- ***Proportion - Partage proportionnel - Pourcentage :***

- Une **proportion** est une égalité de deux rapports du type $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Ainsi, si $(\frac{a}{b}=\frac{c}{d})$ on dit que a et c sont **proportionnels** à b et d

- Soient a, b, c et d des réels non nuls : On a $(\frac{a}{b}=\frac{c}{d})$ équivaut à $(\frac{a}{c}=\frac{b}{d})$ ou encore $(ad=bc)$.

- Pour tous réels a, b, x et y tels que x, y et x+y sont non nuls : Si $(\frac{a}{x}=\frac{b}{y})$ alors $(\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{a+b}{x+y})$.

- Si une grandeur x vaut t% d'une grandeur donnée y alors $x=\frac{t}{100}\times y$.

- Si une grandeur P subit une réduction de t% alors il devient $(1-\frac{t}{100})\times P$. Le nombre $(1-\frac{t}{100})$ est appelé le coefficient multiplicateur associé à cette réduction de P.

- ***Notation scientifique d'un nombre décimal,***

Partie entière d'un réel,valeur approchée décimale et Arrondi d'un réel :

- Soit x un nombre décimal positif :

L'écriture $x = a.10^p$ où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et p un entier relatif s'appelle **notationscientifique** (ou écriture scientifique) de x.

Exemples :

$\frac{1}{400}$ peut s'écrire 0,0025 ou bien $2{,}5\times10^{-3}$.

- Soit x un réel :

Il existe un unique entier relatif a tel que $a \leq x < a+1$.

L'entier a est appelé la **partie entière** de x, il est noté E(x).

- Soient x et α deux réels tels deux que $\alpha> 0$.

On dit qu'un nombre décimal a est une valeur approchée décimale de x par défaut, à α prés si on a : $a \leq x < a+\alpha$.

On dit qu'un nombre décimal a est une valeur approchée décimale de x par excès, à α prés si $(a-\alpha) < x \leq a$.

Soient x et α deux réels tels que $\alpha> 0$. On dit qu'un nombre décimal a est une valeur approchée décimale de x à α prés si $(|x-a| \leq \alpha)$ et on a :

- si $a < x$ alors a est une valeur approchée décimale de x par défaut, à α prés.
- si $a > x$ alors a est une valeur approchée décimale de x par excès, à α prés.
- Pour déterminer un **arrondi** d'un réel x , il suffit de connaître une valeur approchée décimale de x puis prendre l'arrondi de cette valeur approchée décimale .

Exemples :

On a : 3,1415926535897926 est une valeur approchée décimale de π à 10^{-15} prés.

Ainsi :

-L'arrondi de π à deux décimale est 3,14 .

- L'arrondi de π à 15 décimales est 3,141592653589793.

L'arrondi de 65392 au millier est 65000 et l'arrondi de 65392 au centaine est 65400.

II) Exercices



Q-C-M

1) Le prix de l'or a augmenté de 250 % depuis quelques années. Il faut multiplier son ancien prix par n pour obtenir son nouveau prix, avec :

❑n = 2,5 ❑n = 250 ❑n = 3,5

2) Le prix d'un ordinateur TTC (toutes taxes comprises) est de 1562D. La taxe est de 10 %. Quel est son prix Hors taxes ?

❑1620D. ❑1546D. ❑1420D.

3) La valeur approchée par excès de $\sqrt{72}$ à 10^{-4} près est :

❑8,485 ❑8,486 ❑8,4852 ❑8,4853.

Sachant que $\sqrt{72} \simeq 8,4852814$.

4) Indiquer l'ensemble le plus petit auquel appartient chacun des nombres suivants après avoir simplifier son écriture :

$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$: ❑$\mathbb{N}$ ❑$\mathbb{Z}$ ❑ID ❑$\mathbb{Q}$ ❑$\mathbb{R}$

$\frac{\sqrt{36}}{5}+\frac{4}{\sqrt{25}}$: ❑$\mathbb{N}$ ❑$\mathbb{Z}$ ❑ID ❑$\mathbb{Q}$ ❑$\mathbb{R}$

2/ *APPLIQUER*

1. Simplifier l'écriture de chacun des réels suivants :

$A=\frac{18^2\times 4^{-4}}{(0,75)^4\times 2^2}$; $B=\frac{(a^2\times b^3)^{-2}\times a}{a^2\times b^{-5}}$; $(-ab^2)^4\times(a^{-4}b^{-2})\times b^4$.

2. Déterminer la valeur numérique de l'expression $A = 2^x - x^2 + 2x$ dans chacun des cas suivants :

a) $x = 1$; b) $x = -1$; c) $x = 0$; d) $x = -2$; e) $x = 2$; f) $x = 10$.

3. Calculer mentalement, chacun des nombres suivants : 99^2 ; 89×91 ; $101^2 - 99^2$.



APPLIQUER

Ecrire chacun des nombres suivants sous forme de quotient dont le dénominateur ne contient pas de radicaux :

$A = \dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{7\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$, $B = \dfrac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}-7}$, $C = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$,

$D = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$, $E = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$, $F = \dfrac{\sqrt{11}+11}{\dfrac{11}{\sqrt{11}}+1}$.



APPLIQUER

Soit a un réel strictement positif. Montrer que
Si x est un réel appartenant à [0, a] alors (a -x) appartient aussi à [0, a]



S'ENTRAINER

1) Montrer que pour tous réels a, b, c et d on a : $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$

2) Ecrire le nombre 208×1184 sous la forme d'une somme de deux carrés d'entiers.



S'ENTRAINER

Soit $a = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$

1) Vérifier que $a^2 + a - 1 = 0$ et que $\dfrac{1}{a} = a + 1$.

2) Montrer alors que $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} + \dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = \sqrt{5}$.



S'ENTRAINER

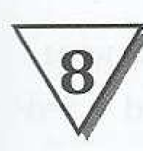
Soient a et b deux réels strictement positifs et distincts.

1) Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

2) Montrer que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{a+b}$.

3) a) Montrer que $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$.

b) En déduire que pour a distinct de 1, on a : $a+\frac{1}{a}>2$.



S'ENTRAINER

Ecrire en notation scientifique les nombres suivants :

30^{10}, $(17,5)^{55}$, $(0,01)^{6}$, $(2006)^{10}$, $(3000)^{-5}$, $(0,031)^{2}\times(0,05)^{4}$, $\frac{1}{125000}$ et $\frac{(0,2)^4\times(0,05)^2}{(5000)^3}$



SEPERFECTIONNER

1) Ecrire sans le symbole de la valeur absolue chacun des réels suivants :

$|1-\sqrt{2}|$; $|\pi-\sqrt{3}|$; $|2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}|$; $|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}|$; $\left|-3+\frac{1}{3}+\sqrt{2}\right|$

2) Soit x un réel appartenant à l'intervalle [-1, 1].

a) Simplifier l'écriture de l'expression $A(x)=2|1-x|+|2x-2|$.

b) En déduire A (0,33) et A (-0,001) .

c) Donner un encadrement de l'expression $B(x)=x+2|1-x|+|2x-2|$.

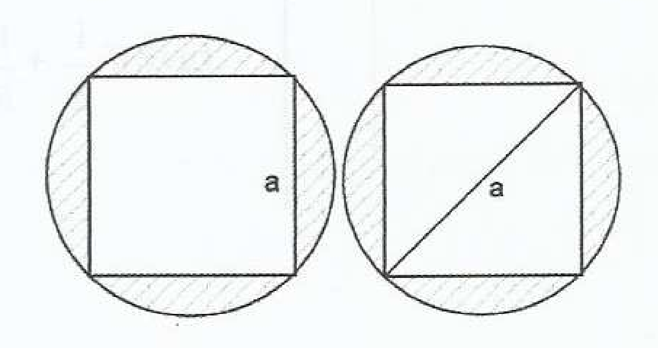


SEPERFECTIONNER

1) On considère une couronne limitée par deux cercles concentriques de rayons respectifs r et R tels que 1,1 < r < 1,2 et 2,2 < R < 2,3.

On désigne par S l'aire de cette couronne. Déterminer un encadrement de S.

2) On donne : $3,14\le\pi\le3,15$ et $0,98\le a\le1,02$ (en m) . Dans chacune des deux figures suivantes, déterminer un encadrement de l'aire hachurée :



1 Q-C-M

1. ☒n = 3,5 ;
2. ☒1420D ;
3. ☒ 8,4853 ;
4. $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=-1\in\mathbb{Z}$; $\frac{\sqrt{36}}{5}+\frac{4}{\sqrt{25}}=\frac{6}{5}+\frac{4}{5}=2\in\mathbb{N}$

2 APPLIQUER

1. $A=\frac{2^2\times3^4\times2^{-8}}{3^4\times2^{-8}\times2^2}=1$; $B=\frac{a^{-4}\times b^{-6}\times a}{a^2\times b^{-5}}=a^{-5}\times b^{-1}=\frac{1}{a^5\times b}$;

$C=a^4\times b^8\times a^{-4}\times b^{-2}\times b^4=b^{10}$.

2. a) Si x = 1 alors $A=2^1-1^2+2\times1=2-1+2=3$

b) Si x = -1 alors

$A=2^{-1}-(-1)^2+2\times(-1)=\frac{1}{2}-1-2=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$.

c) Si x = 0 alors $A=2^0-0^2+2\times0=1-0+0=1$.

d) Si x = -2 alors

$A=2^{-2}-(-2)^2+2\times(-2)=\frac{1}{4}-4-4=\frac{1}{4}-8=-\frac{31}{4}$.

e) Si x = 2 alors $A=2^2-2^2+2\times2=4$.

f) Si x = 10 alors

$A=2^{10}-10^2+2\times10=1024-100+20=944$.

3. $99^2=(100-1)^2=10000-200+1=9801$

$89\times91=(90-1)\times(90+1)=90^2-1^2=8100-1=8099$.

$101^2-99^2=(101-99)\times(101+99)=2\times200=400$.

3 APPLIQUER

$A=\frac{\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(7\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)}{139}=\frac{46+11\sqrt{6}}{139}$.

$B=\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}-7}=\frac{\left(\sqrt{5}+7\right)^2}{-44}=-\frac{5+49+14\sqrt{5}}{44}=-\frac{27+7\sqrt{5}}{22}$.

$C=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{1}=5-2\sqrt{6}$.

$D=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

$E=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}{-3}=\frac{3-\sqrt{18}}{-3}=\frac{3-3\sqrt{2}}{-3}=-1+\sqrt{2}$.

$F=\frac{\sqrt{11}+11}{\frac{11}{\sqrt{11}}+1}=\sqrt{11}$



4 APPLIQUER

Soit a > 0.

$x\in[0,a]$ signifie $0\le x\le a$ signifie $-a\le -x\le 0$

signifie $0\le a-x\le a$.



5 S'ENTRAINER

1) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=a^2c^2+b^2d^2+2abcd+a^2d^2+$ $b^2c^2-2abcd$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$,

ainsi $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

2) $208=12^2+8^2$ et $1184=20^2+28^2$, ainsi 208 x

$1184=(12^2+8^2)(20^2+28^2)$

$=(240+224)^2+(336-160)^2$

$=446^2+176^2$



6 S'ENTRAINER

1) On a : $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a^2=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$,

$\frac{1}{a}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(Vérifier maintenant que $a^2+a-1=0$ et $\frac{1}{a}=a+1$).

2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}+\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}}=\frac{a+a+1}{\sqrt{a(a+1)}}=\frac{2a+1}{\sqrt{a^2+a}}=$

$\frac{\sqrt{5}-1+1}{\sqrt{1}}=\sqrt{5}$

7 S'ENTRAINER

$a>0$; $b>0$ et $a\neq b$.

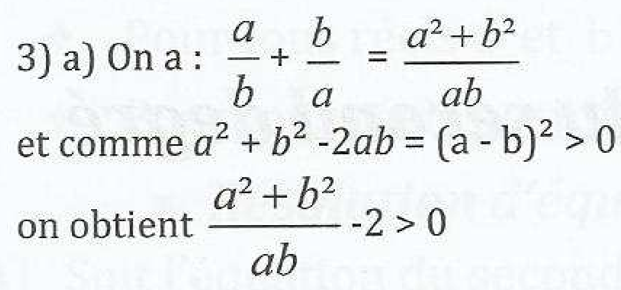
1) On a : $a+b+2\sqrt{ab}>a+b$ c'est-à-dire

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$

et par suite $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

2) On a : $\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=2+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)>1$ donc

$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)>1$ et par conséquent $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{a+b}$



3) a) On a : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$

et comme $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0$

on obtient $\frac{a^2+b^2}{ab}-2>0$

et par conséquent $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$.

b) En appliquant le résultat précédent pour b = 1

($a\neq b$ c'est-à-dire $a\neq 1$), $a+\frac{1}{a}>2$.

8 S'ENTRAINER

$30^{10}=5.9049\times10^{14}$; $(17.5)^{55}=2.3285881\times10^{68}$;

$(0.01)^6=1\times10^{-12}$; $(2006)^{10}=1.0551381\times10^{33}$;

$(3000)^{-5}=4.1152263\times10^{-18}$;

$(0.031)^2\times(0.05)^4=6.00625\times10^{-9}$;

$\frac{1}{125000}=8\times10^{-6}$;

$\frac{(0.2)^4\times(0.05)^2}{(5000)^3}=3.2\times10^{-17}$

9 SE PERFECTIONNER

1) $\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1$;

$\left|\pi-\sqrt{3}\right|=\pi-\sqrt{3}$; $\left|2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}\right|=2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}$;

$\left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right|=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ $\left(\left(3\sqrt{2}\right)^2=18>\left(2\sqrt{3}\right)^2=12\right)$;

$\left|-3+\frac{1}{3}+\sqrt{2}\right|=3-\frac{1}{3}-\sqrt{2}$.

2) $x\in[-1,1]$.

a) $A(x)=2|1-x|+|2x-2|=2|1-x|+2|x-1|$

$=4|1-x|=4(1-x)$.

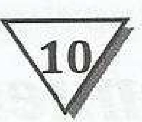
b) $A(0.33)=4(1-0.33)=2.68$;

$A(-0.001)=4(1+0.001)=4.004$.

c) $B(x)=x+4(1-x)=4-3x$.

$-1\le x\le 1\Leftrightarrow -3\le -3x\le 3$

$\Leftrightarrow 1\le 4-3x\le 4\Leftrightarrow 1\le B(x)\le 4$.



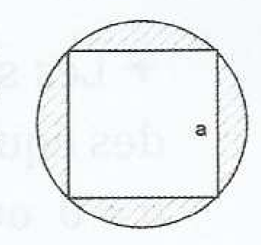
10 SE PERFECTIONNER

1) Soit S l'aire de la couronne limitée par les deux cercles concentriques (de même centre O) de rayons r et R.

On a $S=\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)$

(Encadrer à ton tour S)

2) Dans la 1ère figure, le rayon du cercle est la moitié de la diagonale du carré donc l'aire de la partie hachurée est



$\pi\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-a^2=a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

Dans la 2ère figure, le rayon du cercle est la moitié de la diagonale du carré donc l'aire de la partie hachurée est

$\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=a^2\left(\frac{\pi}{4}-0,5\right)$.

(Encadrer à ton tour les deux parties hachurées).

Problèmes du premier degré et du second degré

I) Résumé de cours

✦ L'équation $ax + b = 0$, où x est l'inconnue réelle et a un réel non nul donné, admet une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x = -\frac{b}{a}$.

✦ Les solutions de l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ sont les solutions de chacune des équations $ax + b = 0$ et $cx + d = 0$; (on a appliqué la propriété : $uv = 0$ signifie $u = 0$ ou $v = 0$).

• ***Tableau de signe du binôme $ax + b$ ($a \neq 0$):***

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe du binôme ax + b	***Signe de (-a)***		***Signe de a***

- Pour résoudre une équation ou une inéquation comportant une inconnue au dénominateur on pourra utiliser ce qui suit :

✦ Il faut que le dénominateur de la fraction ne soit pas nul.

✦ $\left(\frac{a}{b} = 0\right)$ équivaut à $(a = 0$ et $b \neq 0)$

✦ Pour tous réels a, b, c et d tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$. On a :

✦ $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$ équivaut à $(ad = bc)$.

✦ Ramener $\frac{ax+b}{cx+d} \leq e$ à la forme $mx + p \leq 0$ et faire une étude du signe du binôme $mx + p$ (x étant l'inconnue).

- Pour chercher le signe d'un produit, on peut chercher le signe de chaque facteur et appliquer la règle de signe.

- Pour résoudre une équation ou une inéquation contenant des valeurs absolues on pourra utiliser ce qui suit :

✦ Pour tous réels a et b on a : $(|a| = |b|)$ équivaut à $(a = b$ ou $a = -b)$

✦ Pour tous réels <u>positifs</u> a et b on a : $(a \geq b)$ équivaut à $(a^2 \geq b^2)$.

- Pour résoudre une équation ou une inéquation contenant un radical on pourra utiliser ce qui suit :

✦ Pour tous réels a et b on a : (a = b) équivaut à $(a^2 = b^2)$

✦ Pour tous réels <u>positifs</u> a et b on a : $(a \geq b)$ équivaut à $(a^2 \geq b^2)$

• ***Résolution d'équations et d'inéquations du second degré :***

A) Soit l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$, a, b et c sont trois réels tels que a soit non nul et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solutions (racines).

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution (racine double)

$x_0 = -\frac{b}{2a}$ et on a dans ce cas $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

- Si $\Delta > 0$, l'équation a pas deux solutions (racines) distinctes

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et dans ce cas on a:$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

B) Soit le trinôme du second degré $f(x) = ax^2+bx + c$, a, b et c sont trois réels tels que a soit non nul et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x, le trinôme f(x) est du signe de a.

- Si $\Delta = 0$ alors pour tout réel x distinct de $-\frac{b}{2a}$, le trinôme f(x) est du signe de a.

- Si $\Delta > 0$ alors pour tout x à l'extérieur des racines x' et x'' de l'équation f(x) = 0, le trinôme f(x) est du signe de a et pour tout x entre x' et x'', le trinôme f(x) est du signe de (-a).

II) Exercices



1 Q-C-M

Dans chaque cas, une seule réponse est exacte. Laquelle ?

L'ensemble des solutions de l'équation $4x = 7x + 2$	$S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$	$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$	$S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$
L'ensemble des solutions de $\left(x - \frac{5}{4}\right)(5x+4) = 0$	$S = \left\{-\frac{5}{4}, \frac{4}{5}\right\}$	$S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$	$S = \left\{-\frac{4}{5}, \frac{5}{4}\right\}$
$\frac{2x-6}{x-8} = 0$ est équivalent à :	$x = 3$	$x = 3$ et $x \neq 8$	$x = 3$ et $x = 8$

Une équation du second degré dans IR admet toujours	Au moins deux solutions	Au plus deux solutions	Exactement deux solutions
La somme des racines de l'équation ax^2+bx+c; $a\neq o$ est égale à	$\frac{-b}{2a}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{-b}{a}$
Si l'équation ax^2+bx+c; $a\neq o$ admet -1 et 1 comme racines, alors:	$b = 0$	$c = 0$	$\Delta = 0$
Sachant que $\frac{7}{3}$ est une racine de l'équation $3x^2-x-14=0$, alors la deuxième racine est	-1	-2	1



APPLIQUER

Résoudre, dans IR, chacune des équations suivantes :

(E) : $3x + 2 + 5(4 - x) = 8 - 2x.$

(F) : $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} = \frac{5x-2}{6}.$

(G) : $\frac{2x+3}{x-4} \quad \frac{x+1}{x+4} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-16}.$

(H) : $\frac{(x^2-9)(x^2-16)}{(x-3)(x+4)} = 0$



APPLIQUER

a) Montrer que pour tout réel x on a : $3x^2 + x - 4 = (x-1)(3x+4)$.

b) Résoudre alors, dans IR, l'équation $3x^2 + x - 4 = 0$ et l'inéquation $3x^2 \geq 4 - x$.

4 APPLIQUER

Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de :

1. $f_1(x) = 8x^2 + 8x + 2$
2. $f_2(x) = 2x^2 - 3x + 2$
3. $f_3(x) = -x^2 - 3x + 10$

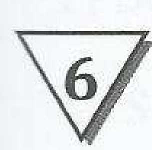
Sans calculer $f_3(-7)$, $f_3(1/2)$, $f_3(148)$, indiquer les signes de ces nombres.



APPLIQUER

Résoudre dans *IR* les inéquations suivantes :

1. $2x^2 - 3x + 2 < 0$ ** 2. $8x^2 + 8x + 2 \leqslant 0$ ** 3. $-x^2 - 3x + 10 < 0$



APPLIQUER

a) Résoudre, dans IR, l'équation : $\sqrt{4x^2 - 1} = 2x - 1$.

b) Résoudre, dans IR, l'inéquation : $\sqrt{4x^2 - 1} \leq 2x - 1$.

Exercice n°6 :

Résoudre, dans IR, les inéquations suivantes :

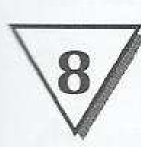
$x - \sqrt{2x + 3} \leq 6$; $x + \sqrt{3x - 2} - \sqrt{4x + 1} \geq 0$. ; $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} \geq 0$.



APPLIQUER

a) Résoudre, dans IR, les inéquations suivantes : $\frac{x+5}{2x-3} \leq 7$; $\frac{6x+1}{2x-3} \geq \frac{3x-2}{x+1}$

b) Représenter graphiquement leurs ensembles de solutions sur un axe .



APPLIQUER

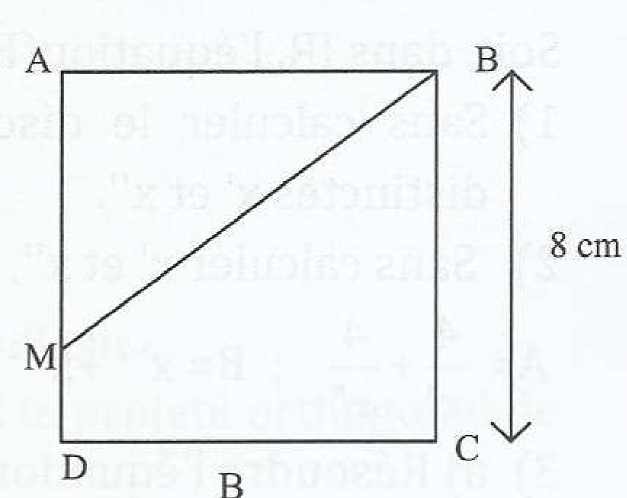
Résoudre, dans IR, les inéquations suivantes :

$x \leq x(x - \frac{1}{2})$; $x(1-2x) \geq 4x - 2$; $(2x+3)^2 \geq (x+1)^2$; $\frac{1}{4}x^2 \leq x$; $4(x-2)^2 - 9 \leq 0$.



S'ENTRAINER

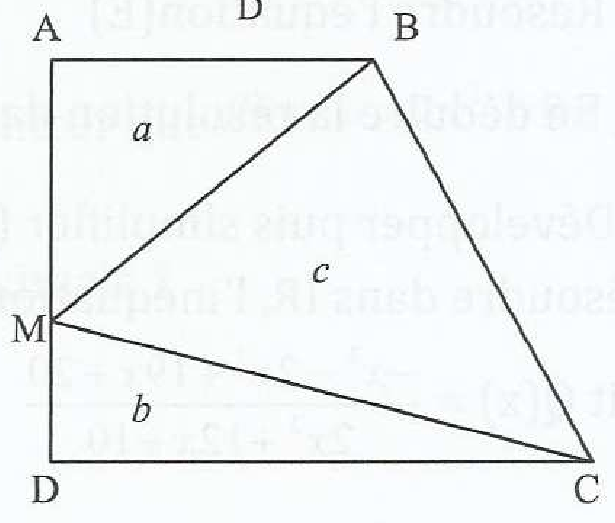
Soit ABCD un carré et M un point de [AD] différent de A et de D. Comment choisir M pour que l'aire du triangle AMB soit le quart de l'aire du trapèze BCDM ?
(Le côté du carré mesure 8 cm)





S'ENTRAINER

Dans la figure ci-contre, les nombres a, b, c désignent les aires des triangles ABM, CDM et BCM.
AB = 6, AD = 8 et DC = 10.



Pour quelle valeur de x = AM a-t-on:

1) a = b ?
2) c = a + b ?
3) CM = MB ?
4) MB = $\sqrt{34}$?



S'ENTRAINER

On considère l'équation (E): $3x^2 -5x-2=0$

1)a) Sans calculer le discriminant Δ, dire pourquoi(E) admet deux racines distinctes.

b) Sans calculer les racines x' et x'' de (E), calculer A= $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}$ et B= (3x'+1)(3x''+1)

2)a) Résoudre dans IR, l'équation (E)

b) Trouver l'ensemble des réels x pour les quels $\sqrt{3x^2-5x-2}$ ait un sens.

c) Résoudre dans IR, l'équation $\sqrt{3x^2-5x-2}=\sqrt{6}$

3) On considère le quotient $Q(x)=\frac{3x^3+4x^2-17x-6}{3x^2-2x-1}$

a) Trouver l'ensemble des réels x pour les quels Q(x) ait un sens.

b) Développer l'expression $(3x^2 -5x-2)(x+3)$; puis simplifier le quotient Q(x).

c) Résoudre dans IR, l'inéquation $Q(x)\geq 0$



SEPERFECTIONNER

Soit, dans IR, l'équation(E) : $x^2 +x - 20=0$.

1) Sans calculer le discriminant Δ, montrer que l'équation admet deux racines distinctes x' et x''.

2) Sans calculer x' et x'', donner les valeurs numériques des expressions, suivantes:

A= $\frac{4}{x'}+\frac{4}{x''}$; B= $x'^2+x''^2$

3) a) Résoudre l'équation(E)

b) En déduire la résolution dans IR de l'équation $(x-\frac{5}{x})^2+(x-\frac{5}{x})-20=0$.

4) a) Développer puis simplifier $(-x-1)(x^2 +x-20)$

b) Résoudre dans IR, l'inéquation $-x^3-2x^2+19x+20>0$.

5) Soit $Q(x)=\frac{-x^3-2x^2+19x+20}{2x^2+12x+10}$

a) Pour quelles valeurs de x, l'expression Q(x) a un sens ? .

b) Résoudre dans IR, l'équation $|Q(x)| - Q(x) = 0$.



13 SEPERFECTIONNER

1) Déterminer les réels x et y vérifiant le système suivant : $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$

2) Soit l'expression $A(x)= x^2 - 3x + 2$
Résoudre dans IR, l'inéquation $A(x) \geq 0$

3) Soit l'expression $B(x)= \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

a) Déterminer l'ensemble D sur lequel B(x) est définie

b) Montrer que pour tout $x \in D$, $B(x)= \dfrac{x+2}{x-1}$

c) Déduire la résolution dans D de l'équation B(x)=0 et de l'inéquation $B(x) \geq x$



14 SEPERFECTIONNER

Le carré ABCD mesure 10cm de coté, E est un point de $[AB]$ tel que AEGH et GHCI soient deux carrés.

a) On pose AE= x, calculer l'aire S_1 du carré AEGH et l'aire S_2 du carré GHCI en fonction de x.

b) On pose $S(x)= S_1 + S_2$, montrerque $S(x)= 2x^2 -20x+100$

Déterminer x pour que S(x) soit égale à la moitié de l'aire

c) du carré ABCD.



15 SEPERFECTIONNER

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que BA = 4 cm et BC = 8 cm.
M est un point du segment [AC] distinct de A et C. On note E le projeté orthogonal de M sur (BC) et F celui de M sur (AB). On pose $AF = x$.

1) On désigne par $S(x)$ l'aire du rectangle FMEB. Montrer que $S(x) = -2x^2 + 8x$.

2) a) Déterminer la valeur maximale de $S(x)$.

b) Pour quelle valeur de x , $S(x)$ atteint sa valeur maximale ?



Q-C-M

L'ensemble des solutions de l'équation $4x=7x+2$	$S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$		
L'ensemble des solutions de $\left(x-\frac{5}{4}\right)(5x+4)=0$			$S=\left\{-\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right\}$
$\frac{2x-6}{x-8}=0$ est équivalent à :		$x=3$ et $x\neq 8$	
Une équation du second degré dans IR admet toujours		Au plus deux solutions	
La somme des racines de l'équation $ax^2+bx+c=0;\ a\neq 0$ est égale à			$\frac{-b}{a}$
Si l'équation $ax^2+bx+c=0;\ a\neq 0$ admet -1 et 1 comme racines, alors:	b = 0		
Sachant que $\frac{7}{3}$ est une racine de l'équation $3x^2-x-14=0$, alors la deuxième racineest		-2	

2 APPLIQUER

* $3x+2+5(4-x)=8-2x$ signifie
$3x+2+20-5x=8-2x$ Signifie
$3x-5x+2x=8-2-20$
Signifie $0\cdot x=-14$ impossible ; $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$.

* $\frac{x}{2}+\frac{x-1}{3}=\frac{5x-2}{6}$ signifie $\frac{3x+2(x-1)}{6}=\frac{5x-2}{6}$
Signifie $3x+2(x-1)=5x-2$
Signifie $3x+2x-5x=-2+2$
Signifie $0\cdot x=0$ toujours vraie ;
$S_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$.

* $\frac{2x+3}{x-4}-\frac{x+1}{x+4}=\frac{x^2+2x-1}{x^2-16}$

Condition : $\begin{cases}x-4\neq 0\\x+4\neq 0\\x^2-16\neq 0\end{cases}$

signifie $\begin{cases}x-4\neq 0\\x+4\neq 0\end{cases}$ signifie $\begin{cases}x\neq 4\\x\neq -4\end{cases}$

signifie $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,4\}$.

Résolution :
$\frac{2x+3}{x-4}-\frac{x+1}{x+4}=\frac{x^2+2x-1}{x^2-16}$

signifie $\frac{(2x+3)(x+4)}{x^2-16}-\frac{(x+1)(x-4)}{x^2-16}=\frac{x^2+2x-1}{x^2-16}$
Signifie $(2x+3)(x+4)-(x+1)(x-4)=x^2+2x-1$
Signifie $(2x^2+11x+12)-(x^2-3x-4)=x^2+2x-1$
Signifie $x^2+14x+16=x^2+2x-1$
Signifie $12x=-17$ Signifie $x=-\frac{17}{12}\in\mathbb{R}\setminus\{-4,4\}$;
$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{17}{12}\right\}$.

* $\frac{(x^2-9)(x^2-16)}{(x-3)(x+4)}=0$

Condition : $\begin{cases}x-3\neq 0\\x+4\neq 0\end{cases}$ signifie $\begin{cases}x\neq 3\\x\neq -4\end{cases}$ signifie
$x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}$.

Résolution :
$\frac{(x^2-9)(x^2-16)}{(x-3)(x+4)}=0$ signifie $\begin{cases}(x^2-9)(x^2-16)=0\\x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}\end{cases}$

signifie $\begin{cases}x^2-9=0 \text{ ou } x^2-16=0\\x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}\end{cases}$

signifie $\begin{cases}x=\pm 3 \text{ ou } x=\pm 4\\x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}\end{cases}$

signifie $x=-3$ ou $x=4$; $S_{\mathbb{R}}=\{-3,4\}$.

3 APPLIQUER

a) $(x-1)(3x+4)=3x^2+4x-3x-4=3x^2+x-4$
b) * $3x^2+x-4=0$ signifie $(x-1)(3x+4)=0$ signifie
$x-1=0$ ou $3x+4=0$ signifie
$x=1$ ou $x=\frac{-4}{3}$; $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{4}{3},1\right\}$.

* $3x^2\geq 4-x$ signifie $3x^2+x-4\geq 0$ signifie $(x-1)(3x+4)\geq 0$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(3x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty,-\frac{4}{3}\right]\cup[1,+\infty[$.



APPLIQUER

1.Δ= 0 donc $8x^2 + 8x + 2$ est du signe de a donc $8x^2 + 8x + 2$ est positif ou nul

2.Δ< 0 donc $2x^2 - 3x + 2$ est strictement du signe de a donc $2x^2 - 3x + 2$ est positif.

3.Δ> 0 donc $-x^2 -3x + 10$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de - a à l'intérieur.
Or $-x^2 -3x + 10$ admet comme racines 2 et - 5
Donc $-x^2 -3x + 10 > 0$ lorsque x appartient à]-5 ;2[
$-x^2 -3x + 10 < 0$ lorsque x appartient à

$]-\infty; -5[\cup]2 ; +\infty[$
$-x^2 -3x + 10 = 0$ lorsque x = -5 ou x = 2
$f_3(-7) < 0$, $f_3(1/2) > 0$ et $f_3(148) < 0$



APPLIQUER

1.Δ< 0 donc $2x^2 - 3x + 2$ est strictement du signe de a donc $2x^2 - 3x + 2$ est positif. Donc S = ∅

2.Δ= 0 donc $8x^2 + 8x + 2$ est du signe de a donc $8x^2 + 8x + 2$ est positif ou nul. Donc S = $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

3.Δ> 0 donc $-x^2 -3x + 10$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de - a à l'intérieur.
Or $-x^2 -3x + 10$ admet comme racines 2 et - 5.Donc

S = $]-\infty, -5[\cup]2, +\infty[$



APPLIQUER

a) $\sqrt{4x^2-1} = 2x-1$; Conditions : $\begin{cases} 4x^2-1\geq 0 \\ 2x-1\geq 0 \end{cases}$

signifie $\begin{cases} x^2 \geq \frac{1}{4} \\ x\geq \frac{1}{2} \end{cases}$ signifie $\begin{cases} |x| \geq \frac{1}{2} \\ x\geq \frac{1}{2} \end{cases}$

signifie $\begin{cases} x\geq \frac{1}{2} \text{ ou } x\leq -\frac{1}{2} \\ x\geq \frac{1}{2} \end{cases}$ Signifie $x \geq \frac{1}{2}$

signifie $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

Résolution :

$\sqrt{4x^2-1} = 2x-1$ signifie $4x^2-1=(2x-1)^2$ signifie
$4x^2-1=4x^2-4x+1$ signifie $4x=2$
Signifie $x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$; $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) $\sqrt{4x^2-1}\leq 2x-1$

Condition : $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

Résolution :

$\sqrt{4x^2-1}\leq 2x-1$ signifie $4x^2-1\leq(2x-1)^2$ signifie
$4x^2-1\leq 4x^2-4x+1$ signifie $4x\leq 2$

signifie $x\leq\frac{1}{2}$ signifie $x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$. Ainsi

$x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cap\left[\frac{1}{2},+\infty\right[=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.



APPLIQUER

* $x-\sqrt{2x+3}\leq 6$ signifie $\sqrt{2x+3}\geq x-6$

Condition : $2x+3\geq 0$ signifie $x\geq -\frac{3}{2}$ signifie

$x\in\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$

Résolution :

1ér cas : si $x-6\leq 0$ c'est à dire $x\leq 6$ signifie

$x\in\left[-\frac{3}{2},6\right]$, on a : l'inégalité $\sqrt{2x+3}\geq x-6$

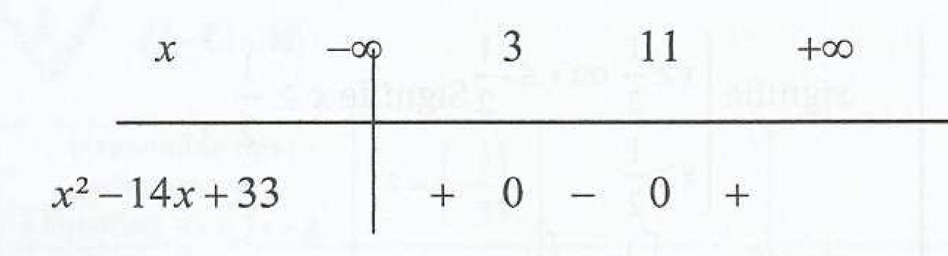
est toujours vraie donc $S_1=\left[-\frac{3}{2},6\right]$.

2ème cas : Si $x-6\geq 0$ c'est à dire $x\geq 6$

signifie $x\in[6,+\infty[$.

$\sqrt{2x+3}\geq x-6$ signifie $2x+3\geq(x-6)^2$ signifie
$2x+3\geq x^2-12x+36$ signifie $x^2-14x+33\leq 0$
$\Delta' = b'^2-ac=(-7)^2-33=49-33=16=4^2$

$x'=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{7-4}{1}=3$ et $x''=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{7+4}{1}=11$



x	$-\infty$		3		11		$+\infty$
$x^2-14x+33$		+	0	$-$	0	+	

Ainsi $x\in[3,11]\cap[6,+\infty[=[6,11]$; $S_2=[6,11]$.

$S_{\mathbb{R}}=S_1\cup S_2=\left[-\frac{3}{2},6\right]\cup[6,11]=\left[-\frac{3}{2},11\right]$.

* $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}\geq 0$ signifie $\sqrt{2x+3}\geq\sqrt{x-2}$

Condition : $\begin{cases}2x+3\geq 0\\ x-2\geq 0\end{cases}$ signifie $\begin{cases}x\geq -\frac{3}{2}\\ x\geq 2\end{cases}$ signifie

$x\in[2,+\infty[$.

Résolution :
$\sqrt{2x+3}\geq\sqrt{x-2}$ signifie $2x+3\geq x-2$ signifie
$x\geq -5$ signifie $x\in[-5,+\infty[$

$S_{\mathbb{R}}=[2,+\infty[\cap[-5,+\infty[=[2,+\infty[$.

8 APPLIQUER

* $\frac{x+5}{2x-3}\leq 7$

Condition : $2x-3\neq 0$ signifie $x\neq\frac{3}{2}$ signifie $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Résolution : $\frac{x+5}{2x-3}\leq 7$ signifie $\frac{x+5}{2x-3}-7\leq 0$ signifie
$\frac{x+5-7(2x-3)}{2x-3}\leq 0$ signifie $\frac{-13x+26}{2x-3}\leq 0$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-13x+26$		+		+	0	$-$	
$2x-3$		$-$	0	+		+	
$\frac{-13x+26}{2x-3}$		$-$	||	+	0	$-$	

$S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[\cup[2,+\infty[$.

* $\frac{6x+1}{2x-3}\geq\frac{3x-2}{x+1}$

Condition : $\begin{cases}2x-3\neq 0\\ x+1\neq 0\end{cases}$ signifie $x\neq\frac{3}{2}$ et $x\neq -1$
signifie $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,\frac{3}{2}\right\}$.

Résolution :
$\frac{6x+1}{2x-3}\geq\frac{3x-2}{x+1}$ signifie $\frac{6x+1}{2x-3}-\frac{3x-2}{x+1}\geq 0$ signifie
$\frac{(6x+1)(x+1)-(3x-2)(2x-3)}{(2x-3)(x+1)}\geq 0$

Signifie $\frac{6x^2+7x+1-(6x^2-13x+6)}{(2x-3)(x+1)}\geq 0$ signifie

$\frac{6x^2+7x+1-6x^2+13x-6}{(2x-3)(x+1)}\geq 0$

Signifie $\frac{20x-5}{(2x-3)(x+1)}\geq 0$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$20x-5$		$-$		$-$	0	+		+	
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	+	
$x+1$		$-$	0	+		+		+	
$\frac{20x-5}{(2x-3)(x+1)}$		$-$	||	+	0	$-$	||	+	

$S_{\mathbb{R}}=\left]-1,\frac{1}{4}\right]\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$.

9 S'ENTRAINER

* $x\leq x\left(x-\frac{1}{2}\right)$ signifie $x-x\left(x-\frac{1}{2}\right)\leq 0$ signifie
$x\left(1-x+\frac{1}{2}\right)\leq 0$ signifie $x\left(\frac{3}{2}-x\right)\leq 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3}{2}-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x\left(\frac{3}{2}-x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 0] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

* $x(1-2x) \geq 4x-2$ signifie $-2x^2+x \geq 4x-2$ signifie $-2x^2-3x+2 \geq 0$

$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times(-2)\times 2 = 9+16 = 25$

$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-5}{-4} = \frac{1}{2}$ et $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+5}{-4} = -2$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x^2-3x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S_{\mathbb{R}} = \left[-2, \frac{1}{2}\right]$

* Utiliser de même un tableau de signes pour les autres.



S'ENTRAINER

On pose AM = x où $x \in [0,8]$.

Soit A_1 l'aire du triangle AMB et A_2 l'aire du trapèze BCDM

$A_1 = \frac{AB \times AM}{2} = \frac{8x}{2} = 4x$.

$A_2 = \frac{(BC+DM)\times CD}{2} = \frac{(8+8-x)\times 8}{2} = 4(16-x)$.

$A_1 = \frac{1}{4}A_2 \Leftrightarrow 4x = \frac{4(16-x)}{4} \Leftrightarrow 4x = 16-x$

$\Leftrightarrow 5x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{5} = 3.2$

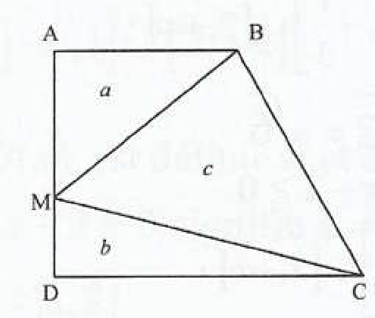
$3.2 \in [0,8]$ donc pour que l'aire du triangle AMB soit le quart de l'aire du trapèze BCDM il faut que AM = 3,2 cm



S'ENTRAINER

$a = \frac{6x}{2} = 3x$; $b = \frac{10(8-x)}{2} = 5(8-x)$

$c = Aire(ABCD) - (a+b) = \frac{8(6+10)}{2} - [3x+5(8-x)]$



D'où $c = 24+2x$.

1. $a = b$ signifie $3x = 40-5x$ signifie $x = 5$ $(x \in [0,8])$

2. $c = a+b$ signifie $24+2x = 3x+40-5x$ signifie $x = 4$.

3. signifie $100+(8-x)^2 = x^2+36$ (d'aprés Pythagore)
$CM = MB$ signifie $CM^2 = MB^2$
Signifie $100+64-16x+x^2 = x^2+36$ signifie $x = 8$ (dans ce cas M=D).

4. $MB = \sqrt{34}$ signifie $MB^2 = 34$.
signifie $x^2+36 = 34$ signifie $x^2 = -2$ impossible

11 SE PERFECTIONNER

$(E): 3x^2-5x-2 = 0$.

1) a) (E) admet deux racines distinctes car a = 3 et c = -2 sont de signes contraires.

b) $A = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x'+x''}{x'x''} = \frac{S}{P} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} = \frac{-5}{2}$.

$B = (3x'+1)(3x''+1) = 9x'x''+3(x'+x'')+1 = 9P+3S+1$

$= 9\left(\frac{-b}{a}\right)+3\frac{c}{a}+1 = 9\times\frac{5}{3}+3\times(\frac{-2}{3})+1 = 15-2+1 = 14$

2. a) $(E): 3x^2-5x-2 = 0$.

$\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4\times 3\times(-2)$.
$= 25+24 = 49 = 7^2$

$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-7}{6} = \frac{-1}{3}$; $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+7}{6} = 2$;

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}$.

b) $\sqrt{3x^2-5x-2}$ a un sens si et seulement si $3x^2-5x-2 \geq 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3x^2-5x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$3x^2-5x-2 \geq 0$

signifie $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [2, +\infty[$.

c) $\sqrt{3x^2-5x-2} = \sqrt{6}$

<u>Condition</u> : $3x^2-5x-2 \geq 0$

signifie $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [2, +\infty[$.

<u>Résolution</u> :

$\sqrt{3x^2-5x-2} = \sqrt{6}$

signifie $3x^2-5x-2 = 6$

signifie $3x^2-5x-8 = 0$

(a – b + c = 0)

donc $x' = -1$ et $x'' = \frac{-c}{a} = \frac{8}{3}$.

3) $Q(x) = \frac{3x^3+4x^2-17x-6}{3x^2-2x-1}$.

a) $Q(x)$ a un sens si et seulement si $3x^2-2x-1 \neq 0$ signifie $x \neq 1$ et $x \neq \frac{c}{a}$ c'est à dire $x \neq \frac{-1}{3}$

Ainsi $Q(x)$ a un sens si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$

b) $(3x^2 -5x-2)(x+3) =$

$3x^3+9x^2-5x^2-15x-2x-6 = 3x^3+4x^2-17x-6$

$Q(x) = \frac{3x^3+4x^2-17x-6}{3x^2-2x-1} = \frac{(3x^2-5x-2)(x+3)}{3x^2-2x-1}$

Or $3x^2-5x-2 = 3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-2) = (3x+1)(x-2)$ et

$3x^2-2x-1 = 3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1) = (3x+1)(x-1)$

Donc $Q(x) = \frac{(3x+1)(x-2)(x+3)}{(3x+1)(x-1)} = \frac{(x-2)(x+3)}{x-1}$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$.

c) $Q(x) \geq 0$ signifie $\frac{(x-2)(x+3)}{x-1} \geq 0$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$.

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

$x \in [-3, 1[\cup]1, 2] \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

donc $S_{\mathbb{R}} = \left[-3, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, 1\right[\cup]1, 2]$

12 SE PERFECTIONNER

$(E) : x^2+x-20 = 0$.

1) a = 1 et c = -20 sont de signes contraires donc (E) admet deux racines distinctes x' et x''.

2) Sachant que $x'+x'' = -\frac{b}{a} = -1$ et $x'x'' = \frac{c}{a} = -20$,

on a : $A = \frac{4}{x'} + \frac{4}{x''} = \frac{4(x'+x'')}{x'x''} = \frac{-4}{-20} = \frac{1}{5}$

Et $B = x'^2 + x''^2 = (x'+x'')^2 - 2x'x'' = 1+40 = 41$.

3) a) $(E) : x^2+x-20 = 0$

$\Delta = 1+80 = 81$

donc $x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-9}{2} = -5$ et $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+9}{2} = 4$.

b) Soit l'équation $\left(x-\frac{5}{x}\right)^2 + \left(x-\frac{5}{x}\right) - 20 = 0$.

Effectuons le changement de variables suivant : $t = x - \frac{5}{x}$, l'équation devient $t^2+t-20 = 0$

signifie $t = -5$ ou $t = 4$

* $x - \frac{5}{x} = -5$ signifie $x^2-5 = -5x$ signifie $x^2+5x-5 = 0$,

$\Delta = 25+20 = 45$

donc $x' = \frac{-5-\sqrt{45}}{2} = \frac{-5-3\sqrt{5}}{2}$ et $x'' = \frac{-5+\sqrt{45}}{2} = \frac{-5+3\sqrt{5}}{2}$.

* $x - \frac{5}{x} = 4$ signifie $x^2-5 = 4x$ signifie $x^2-4x-5 = 0$

(a – b + c=0)

donc $x' = -1$ et $x'' = -\frac{c}{a} = 5$.

D'où $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-5-3\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+3\sqrt{5}}{2}, -1, 5\right\}$.

4) a) $(-x-1)(x^2+x-20) = -x^3-x^2+20x-x^2-x+20$.

$= -x^3-2x^2+19x+20$

b) $-x^3-2x^2+19x+20>0$

signifie $(-x-1)(x^2+x-20)>0$

x	$-\infty$		-5		-1		4		$+\infty$
$-x-1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2+x-20		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$S_\mathbb{R} =]-\infty,-5[\cup]-1,4[$.

5) $Q(x)=\dfrac{-x^3-2x^2+19x+20}{2x^2+12x+10}$.

a) $Q(x)$ est définie si et seulement si

$2x^2+12x+10\neq 0$

signifie $x^2+6x+5\neq 0$

signifie $x\neq -1$ et $x\neq -5$

signifie $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,-1\}$.

b)

$|Q(x)|-Q(x)=0$

signifie $|Q(x)|=Q(x)$

signifie $Q(x)\geq 0$

Or $Q(x)=\dfrac{(-x-1)(x^2+x-20)}{2(x+1)(x+5)}$

$=-\dfrac{(x+1)(x+5)(x-4)}{2(x+1)(x+5)}=-\dfrac{1}{2}(x-4)$

pour tout réel

$x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,-1\}$.

$Q(x)\geq 0$ signifie $\begin{cases}-\frac{1}{2}(x-4)\geq 0\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,-1\}\end{cases}$

signifie $\begin{cases}x\leq 4\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,-1\}\end{cases}$

signifie $S_\mathbb{R}=]-\infty,-5[\cup]-5,-1[\cup]-1,4]$.



SE PERFECTIONNER

1. x et y sont les racines de l'équation $x^2-3x+2=0$; a + b + c = 0 donc $x=1$ ou $x=2$.

   (x,y) = (1,2) ou (2,1).

2. $A(x)\geq 0$ signifie $x^2-3x+2\geq 0$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_\mathbb{R} =]-\infty,1]\cup[2,+\infty[$.

3. a) $B(x)$ est définie si et seulement si $x^2-3x+2\neq 0$ signifie $x\neq 1$ et $x\neq 2$ signifie $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$.

b) $B(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{x+2}{x-1}$

pour tout réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$.

c) *

$B(x)=0$ signifie $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x\text{-}1}=0\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}\end{cases}$ signifie $x=-2$.

*

$B(x)\geq x$ signifie $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1}\geq x\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}\end{cases}$ signifie $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1}-x\geq 0\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}\end{cases}$

signifie $\begin{cases}\dfrac{x+2-x^2+x}{x-1}\geq 0\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}\end{cases}$ signifie $\begin{cases}\dfrac{-x^2+2x+2}{x-1}\geq 0\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}\end{cases}$

x	$-\infty$		$\sqrt{3}-1$		1		2		$\sqrt{3}+1$		$+\infty$
$-x^2+2x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{-x^2+2x+2}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$S_\mathbb{R} =]-\infty,\sqrt{3}-1[\cup]1,2[\cup]2,\sqrt{3}+1[$



SE PERFECTIONNER

a) Soit S_1 l'aire du carré AEGF, on a : $S_1 = AE^2 = x^2$.

Soit S_2 l'aire du carré GHCI, on a : $S_2 = GH^2 = (10-x)^2$.

b) $S(x) = S_1 + S_2 = x^2 + (10-x)^2$

$= x^2 + x^2 - 20x + 100 = 2x^2 - 20x + 100$.

c) S(x) est la moitié de l'aire du carré ABCD signifie $S(x) = \frac{AB^2}{2}$

Signifie $S(x) = 50$ signifie $2x^2 - 20x + 100 = 50$

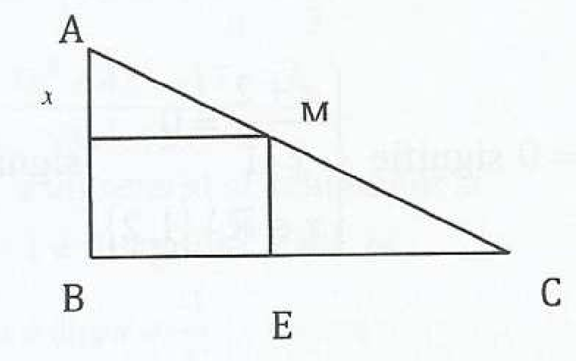
signifie $2x^2 - 20x + 50 = 0$

Signifie $x^2 - 10x + 25 = 0$ signifie $(x-5)^2 = 0$ signifie $x = 5 \in [0,10]$.



SE PERFECTIONNER

1. Soit $S(x)$ l'aire du rectangle FMEB.



D'après l'énoncé de Thalès on a :

$\frac{AF}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{FM}{BC}$ signifie $\frac{x}{4} = \frac{FM}{8}$

signifie $FM = 2x$.

$S(x) = FM \times FB = 2x(4-x) = -2x^2 + 8x$.

2. a) Soit S_{max} la valeur maximale de $S(x)$ alors $S(x) \leq S_{max}$ pour tout $x \in [0,4]$.

Signifie $-2x^2 + 8x - S_{max} \leq 0$ pour tout $x \in [0,4]$

(un trinôme qui a le signe de a et qui peut être nul pour tout x)

Signifie $\Delta' = 0$ signifie $4^2 - (-2)(-S_{max}) = 0$ signifie $S_{max} = 8$

b) $S(x)$ atteint sa valeur maximale signifie $\Delta' = 0$ signifie $x = \frac{-b'}{a} = \frac{-4}{-2} = 2$ signifie $F = A * B$.

Notion de polynômes

I) Résumé de cours

A) Fonctions Polynômes, Fonctions Rationnelles:

Soient $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ et a_n sont des réels tels que a_n soit non nul.

- La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, s'appelle une fonction polynôme de degré n et de coefficients $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ et a_n.
  - On dit également f est un polynôme de degré n et on note $d°(f) = n$.
  - Soit α un réel, on a (αf) est un polynôme défini par :

$(\alpha f)(x) = (\alpha a_n)x^n + (\alpha a_{n-1})x^{n-1} + ... + (\alpha a_1)x + \alpha a_0$.

- Deux polynômes sont égaux lorsqu'ils ont le même degré et leurs coefficients des termes (monômes) de même degré sont égaux.
- La somme, le produit, de deux polynômes est un polynôme.
- **Le quotient** de deux fonctions polynômes s'appelle une **fonction rationnelle**.
- Soit P et Q deux polynôme tel que $dég(P) = n$ **et** $dég(Q) = m$.
- Si $n = m$ **alors** $dég(P+Q) = n$.
- Si $n < m$ **alors** $dég(P+Q) = m$.
- $dég(P \times Q) = n + m$.

B) Racine d'un polynôme - Factorisation d'un polynôme :

Soit P un polynôme de degré n supérieur à 1.

- On dit qu'un réel α est une racine du polynôme P lorsque $P(\alpha) = 0$.
- Si α est une racine de P alors il existe un polynôme Q de degré (n-1) tel que pour tout réel x on a $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$; $(n \geq 1)$.
- Si α et β sont deux racines de P alors il existe un polynôme Q de degré (n-2) tel que pour tout réel x on a $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$; $(n \geq 2)$.
- Plus généralement, si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sont k racines de P alors il existe un polynôme Q de degré (n-k) tel que pour tout réel x on a :

$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)Q(x)$; $(n \geq k)$.

II) Exercices :



1 VRAI-FAUX ;Q-C-M

I. Soit le polynôme f définie sur IR par $f(x)= ax^3+bx^2+cx+d$.

1) Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

* (a- b + c - d = 0) signifie (-1 est un zéro de f) .
* (a + b + c + d = 0) signifie (1 est un zéro de f) .

2) Relier par une flèche chaque ligne de la colonne A avec qui lui correspond dans B.

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th></tr>
<tr><td>Si a et b sont opposés et
c et d sont opposés, alors</td><td rowspan="3">1 est un zéro de f
-1 est un zéro de f</td></tr>
<tr><td>Si a et c sont opposés et
b et d sont opposés, alors</td></tr>
<tr><td>Si a et d sont opposés et
b et c sont opposés, alors</td></tr>
</table>

II. Trouver la bonne réponse dans chacun des cas suivants :

a) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{x^4-16}{x^2+4}$ est :

* Une fonction polynôme de degré 2.
* Une fonction polynôme de degré 4.
* N'est pas une fonction polynôme.

b) La fonction $h(x) = a_2x^2 + a_1x + 3$ est une fonction polynôme nulle lorsque :

* $a_2 = a_1 = 0$ * $a_2 = a_1 = -3$ * Ne peut pas être identiquement nulle.

c) Une fonction constante non nulle est une fonction polynôme de degré égal à :

* 1. * 0. * N'a pas de degré.

d) Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, le degré du polynôme $\alpha \cdot P$ est :

* n. * 0. * αn .



2 APPLIQUER

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=\left(x^2+1\right)^2-\left(4x+2\right)^2$.

1. Montrer que P est une fonction polynôme dont on précisera le degré.
2. Résoudre l'équation $P(x)=0$.



3 APPLIQUER

On considère la fonction polynôme P définie par $P(x)=-x^3+6x^2-9x+k$, où k est un nombre réel.

1. Déterminer la valeur de k pour que $x=4$ soit une racine de P.
2. Pour la valeur de k obtenue à la question 1. Résoudre l'inéquation $P(x)<0$.



S'ENTRAINER

Soit l'expression $f(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^3+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^3$.

1) Montrer que f est une fonction polynôme dont on précisera le degré.
2) Résoudre l'inéquation $f(x)\geq 0$.



S'ENTRAINER

Déterminer une fonction polynôme P de degré 3 admettant 1, -3 et -4 pour racines et telle que P(2) = 90.



SEPERFECTIONNER

1) Soit $P(x)=x^2-2x-8$
   a) Résoudre dans IR, l'équation P(x)=0
   b) Factoriser P(x)
2) Soit $Q(x)=x^3-2x^2-6x+8$
   a) Vérifier que 1 est une racine de l'équation Q(x)=0
   b) Montrer que Q(x)= (x-1)P(x)
   c) Achever alors la résolution dans IR de l'équation Q(x)=0
   d) Donner le tableau de signe Q(x)
   e) Sans les calculer, comparer Q(1), Q(2) et Q(-1)
   f) Résoudre dans IR, l'équation $|Q(x)|+Q(x)=0$
3) Soit $T(x)=x^6-2x^4-6x^2+8$
   a) Résoudre dans IR, l'équation T(x)=0
   b) Factoriser T(x)
4) Soit $f(x)=\dfrac{T(x)}{P(x)}$
   a) Déterminer le domaine de définition de f.
   b) Simplifier f(x)
   c) Résoudre dans IR, l'inéquation $f(x)\geq 0$



SEPERFECTIONNER

1) Résoudre dans $\mathbf{IR^2}$ le système $\begin{cases} x+y=13 \\ xy=36 \end{cases}$

2) En déduire une factorisation du polynôme $R(x) = x^2 - 13x + 36$

3) Soit $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$. En s'inspirant de la deuxième question, factoriser P(x) sous forme de deux polynômes de second degré.

4) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 les racines de P,sans les calculer déterminer en justifiant leur produit.

5) Résoudre $P(x) = 0$.

6) En déduire la résolution du système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 97 \\ xy = 36 \end{cases}$

7) Soit $Q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Chercher une racine évidente de Q

8) Factoriser Q(x).

9) Etudier le signe de Q(x).

10) En déduire la résolution de l'inéquation $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$.



SEPERFECTIONNER

1) Soit $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$.

a) Calculer $P(2)$.

b) En déduire une factorisation de $P(x)$; puis résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.

2) Soit $Q(x) = x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 36x + 16$.

a) Vérifier que 1 et 2 sont deux racines du polynôme Q.

b) Ecrire $Q(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes de degré 2.

3) On pose $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$.

a) Déterminer D le domaine de définition de f.

b) Montrer que pour tout réel $x \in D$, on a : $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{x+2}$.

c) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.



SEPERFECTIONNER

Soit $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

1) Vérifier que 3 est une racine de l'équation : $P(x) = 0$

2) Trouver les réels a, b et c pour que $P = (x-3)(ax^2 + bx + c)$.

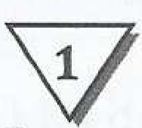
3) Résoudre alors l'équation : $P(x) = 0$.

4) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^6 - 5x^4 - 2x^2 + 24 = 0$.

5) Soit $Q(x)=x^4-2x^3-12x^2+8x+32$.

a) Factoriser Q sachant qu'il admet deux racines opposées.

b) Soit $R(x)=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$. Déterminer l'ensemble de définition de R(x) puis résoudre l'inéquation $R(x)\geq 0$



VRAI-FAUX ; Q-C-M

I.

1) *) (a-b+c-d=0) signifie (-1 est un zéro de f). Vrai

En effet :(a-b+c-d=0) signifie (-a+b-c+d=0)

Signifie $a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)+d=0$

Signifie f(-1)=0.

Signifie (-1 est un zéro de f).

*) (a+b+c+d=0) Signifie (1 est un zéro de f). Vraie

En effet : (a+b+c+d=0) Signifie $a\times 1^3+b\times 1^2+c\times 1+d=0$

Signifie f(1)=0.

Signifie (1 est un zéro de f).

2)

A	B
Si a et b sont opposés et c et d sont opposés, alors	**1 est un zéro de f**
Si a et c sont opposés et b et d sont opposés, alors	**-1 est un zéro de f**
Si a et d sont opposés et b et c sont opposés, alors	

II.

a) $g(x)=\dfrac{x^4-16}{x^2+4}=\dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2+4}=x^2-4$ pour tout réel x, donc <u>g est une fonction polynôme de degré 2.</u>

b) $h(x)=a_2x^2+a_1x+3$ <u>ne peut pas être nulle</u> car ses coefficients ne sont pas tous nuls.

c) Une fonction constante non nulle est une fonction polynôme de degré égal à <u>0</u>.

d) Soit P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha\in\mathbb{R}^*$, le degré du polynôme $\alpha\cdot P$ est <u>n</u>.



APPLIQUER

1) $P(x)=(x^2+1)^2-(4x+2)^2$

$=x^4+2x^2+1-16x^2-16x-4=x^4-14x^2-16x-3$

Donc P est une fonction polynôme de degré 4.

2) $P(x)=0$ signifie $(x^2+1)^2-(4x+2)^2=0$

Signifie $(x^2+1-4x-2)(x^2+1+4x+2)=0$

Signifie $(x^2-4x-1)(x^2+4x+3)=0$

Signifie $x^2-4x-1=0$ ou $x^2+4x+3=0$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{2-\sqrt{5},2+\sqrt{5},-1,-3\right\}$.



APPLIQUER

1) $x=4$ soit une racine de P signifie $P(4)=0$

signifie - 64 + 96 – 36 + k = 0

Signifie – 4 + k = 0 signifie k = 4.

2) Soit $P(x)=-x^3+6x^2-9x+4$.

Pour résoudre l'inéquation $P(x)<0$, factorisons $P(x)$.

En effet :

$P(x)=(x-4)(ax^2+bx+c)$

$=ax^3+(b-4a)x^2+(c-4b)x-4c$

$=-x^3+6x^2-9x+4$

Par identification on a :

$\begin{cases}a=-1\\ b-4a=6\\ c-4b=-9\\ -4c=4\end{cases}$ *signifie* $\begin{cases}a=-1\\ b=2\\ c=-1\end{cases}$;

d'où $P(x)=(x-4)(-x^2+2x-1)$.

On remarque que

$-x^2+2x-1=-(x^2-2x+1)=-(x-1)^2$, ainsi

$P(x)=-(x-4)(x-1)^2$.

$P(x)<0$ signifie $-(x-4)(x-1)^2<0$ signifie

$(4-x)(x-1)^2<0$ signifie $x\in\left]4,+\infty\right[$.



S'ENTRAINER

1) $f(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^3+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^3$

En utilisant les identités remarquables :

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ et

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$,

on obtient :

$f(x)=x^3+3x^2\sqrt{1+x^2}+3x\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3$

$+x^3-3x^2\sqrt{1+x^2}+3x\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3$

$=2x^3+6x(1+x^2)=8x^3+6x$

Donc f est une fonction polynôme de degré égal à 3.

2) $f(x)\geq 0$ signifie $8x^3+6x\geq 0$

signifie $2x(4x^2+3)\geq 0$

signifie $x\geq 0$ car $2(4x^2+3)>0$

$S_{\mathbb{R}}=\left[0,+\infty\right[$.



S'ENTRAINER

Soit P une fonction polynôme de degré 3 admettant 1, -3 et -4 pour racines

On a :

$P(x)=a(x-1)(x+3)(x+4)=ax^3+6ax^2+5ax-12a$

Or P(2) = 90 signifie
$8a+24a+10a-12a=90$

signifie $30a=90$

signifie $a=3$

Ainsi $P(x)=3x^3+18x^2+15x-36$.



SE PERFECTIONNER

1) $P(x)= x^2 -2x-8$

a) P(x)=0

$\Delta'=(-1)^2-(-8)=9>0 \Rightarrow x'=\frac{1-\sqrt{9}}{1}=-2$ et

$x''=\frac{1+\sqrt{9}}{1}=4 \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{-2,4\}$.

b) P(x)= (x-x')(x-x'')=(x+2)(x-4).

2) $Q(x) = x^3 -3x^2 -6x+8$.

a) $Q(1)=1^3-3\times1^2-6\times1+8=0$

b) $(x-1)P(x) = (x-1)(x^2 -2x-8) = Q(x)$.

c) Q(x) = 0 signifie (x-1)P(x) = 0

signifie x – 1 = 0 ou P(x) = 0

signifie x = 1 ou x = -2 ou x = 4.

d)

x	$-\infty$ -2	1	4	$+\infty$
$x-1$	-	-	+	+
$P(x)$	+	-	-	+
$Q(x)$	-	+	-	+

e) D'après le tableau de signe de Q(x), on a: Q(-1) > 0 = Q(1) > Q(2).

f) $|Q(x)|$ + Q(x)=0

*) Si $x\in\left]-\infty,-2\right]\cup[1,4]$ alors $Q(x)\le 0$, l'équation devient $-Q(x)+Q(x)=0$ toujours vraie donc $S_1=\left]-\infty,-2\right]\cup[1,4]$.

*) Si $x\in[-2,1]\cup[4,+\infty[$ alors $Q(x)\ge 0$, l'équation devient $Q(x)+Q(x)=0$ signifie $2Q(x)=0$ signifie $Q(x)=0$ signifie x = -2 ou x = 1 ou x = 4 donc $S_2=\{-2,1,4\}$.

$S_{\mathbb{R}}=S_1\cup S_2 = \left]-\infty,-2\right]\cup[1,4]$.

3)a) $T(x)= x^6 -3x^4 -6x^2 +8$

$T(x) = Q(x^2)$.

T(x) = 0 signifie $Q(x^2) = 0$ signifie $x^2 = -2$ impossible ou $x^2 = 1$ ou $x^2 = 4$

Signifie x = -1 ou x = 1 ou x = -2 ou x = 2.

$S_{\mathbb{R}}=\{-2,-1,1,2\}$.

b) $T(x) = (x^2 + 2)(x + 1)(x – 1)(x + 2)(x – 2)$.

4) $f(x)=\frac{T(x)}{P(x)}$

a) $x\in D_f$ signifie $P(x)\neq 0$ signifie $x\neq -2$ et $x\neq 4$ signifie $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2,4\}$.

b) $f(x)=\frac{T(x)}{P(x)}=\frac{(x^2+2)(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-4)}$

$=\frac{(x^2+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{x-4}$

pour tout réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,4\}$.

c) $f(x)\ge 0$ signifie $\frac{(x^2+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{x-4}\ge 0$

signifie $\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{x-4}\ge 0$

x	$-\infty$ -2	-1	1	2	4	$+\infty$
x^2-1	+		-	+	+	+
x-2	-		-	-	+	+
x-4	-		-	-	-	+
f(x)	+	+	-	+	-	+

$S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty,-2\right[\cup\left]-2,-1\right]\cup[1,2]\cup\left]4,+\infty\right[$.

7

SE PERFECTIONNER

1) $\begin{cases} x+y=13 \\ xy=36 \end{cases}$

x et y si elles existent sont les racines de l'équation $x^2 -13x +36 = 0$.

$\Delta=13^2-4\times36=25\Rightarrow$ (x,y) = (4,9) ou (9,4).

2) $R(x) = x^2 -13x +36 = (x-4)(x-9)$.

3) $P(x)= x^4 -13x^2 +36$; $P(x)= (x^2-4)(x^2-9)$.

4) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 sont les racines de P par conséquent, $P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$

$= x^4 -13x^2 +36$

Le produit des racines est le cœfficient constant du polynôme c'est donc 36.

5. P(x) = 0 signifie $x^2 = 4$ ou $x^2 = 9$ signifie x = -2 ou x = 2 ou x = -3 ou x = 3

6. $\begin{cases} x^2+y^2=97 \\ xy=36 \end{cases}$

Signifie $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=97 \\ xy=36 \end{cases}$

Signifie $\begin{cases} (x+y)^2 = 97 + 72 = 169 \\ xy = 36 \end{cases}$

Signifie $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 36 \end{cases}$

Ou $\begin{cases} x + y = -13 \\ xy = 36 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 13 \\ \alpha\beta = 36 \end{cases}$ avec $\alpha = -x$ et $\beta = -y$

D'où (x,y) = (4,9) ou (9,4) ou (-4,-9) ou (-9,-4).

7) $Q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Q(1) = 0

8) $Q(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$

Par identification on trouve a = 1 , b = 0 et c = -4

C'est-à-dire $Q(x) = (x-1)(x^2-4)$

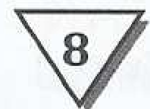
9)

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	-	+	+	
x^2-4	+	-	-	+	
$Q(x)$	-	+	-	+	

10)

x	$-\infty$	-3	-2	1	2	3	$+\infty$
x^2-9	+	-	-	-	-	+	
x^2-4	+	+	-	-	+	+	
$P(x)$	+	-	+	+	-	+	
$Q(x)$	-	-	+	-	+	+	
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	-	+	+	-	-	+	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty,-3] \cup]1,2[\cup]2,3[$.



8 SE PERFECTIONNER

1. $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

a) P(2) = 8 – 16 – 8 + 16 = 0 donc 2 est une racine du polynôme P.

b) <u>Factorisation de P :</u>

$P(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$, où a, b et c sont trois réels à déterminer. On peut immédiatement prendre $a=1$ car le coefficient du monôme du plus haut degré est égal à 1. En développant le produit précédent on obtient :

$P(x) = x^3 + (b-2)x^2 + (c-2b)x\ 2c$

Or on sait que $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$; par identification des deux polynômes on obtient :

$\begin{cases} b-2=-4 \\ c-2b=-4 \\ -2c=16 \end{cases}$ signifie $\begin{cases} b=-2 \\ c=-8 \end{cases}$.

Ainsi on a: $P(x) = (x-2)(x^2-2x-8)$ pour tout réel x.

<u>Résolution de l'équation $P(x) = 0$:</u>

$P(x) = 0$ signifie $(x-2)(x^2-2x-8) = 0$ signifie

$x-2=0$ ou $x^2-2x-8=0$

$x^2-2x-8=0$, $\Delta' = 9$, $x' = -2$ et $x'' = 4$

$S_{\mathbb{R}} = \{-2, 2, 4\}$.

2. $Q(x) = x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 36x + 16$

a) Q(1) = 0 et Q(2) = 0. (à vérifier).

b) $Q(x) = (x-1)(x-2)(x^2+bx+c)$

$= (x^2-3x+2)(x^2+bx+c)$.

Vous remarquez qu'on a pris le coefficient du monôme de degré 2 égal à 1, aussi onpeut prendre c = 8 car on constate que le coefficient constant est égal à 16. (2c = 16donc c = 8). Ces constatations peuvent nous bénéficier du temps.

Donc $Q(x) = (x^2-3x+2)(x^2+bx+8)$; il nous reste à chercher b.On développe le produit on obtient $Q(x) = x^4 + (b-3)x^3 + (10-3b)x^2 + (2b-24)x + 16$.

Par identification on obtient b = -6 et on aura $Q(x) = (x^2-3x+2)(x^2-6x+8)$.

3. $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$.

a) Notons D_f le domaine de définition de f .

$x \in D_f$ signifie $P(x) \neq 0$ signifie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 4\}$; d'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 4\}$.

b) $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x^2-6x+8)}{(x-2)(x+2)(x-4)}$, or

$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$ (on cherche Δ' puis les racines et ensuite on factorise).

Ainsi $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+2)(x-4)} = \frac{(x-1)(x-2)}{x+2}$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 4\}$.

c) $f(x) \geq 0$ signifie $\dfrac{(x-2)(x-1)}{x+2} \geq 0$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 4\}$.

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	

$S_{\mathbb{R}} =]-2, 1] \cup]2, 4[\cup]4, +\infty[$.

9 SE PERFECTIONNER

$P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$.

1) P(3) = 0.

2) $P(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-3b)x - 3c =$

$x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

Par identification on aura :

$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -5 \\ c - 3b = -2 \\ -3c = 24 \end{cases}$ signifie $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -8 \end{cases}$

d'où $P(x) = (x-3)(x^2 - 2x - 8)$.

3) $P(x) = 0$ signifie $(x-3)(x^2 - 2x - 8) = 0$

signifie $x - 3 = 0$ ou $x^2 - 2x - 8 = 0$ signifie $x = 3$ ou $x = -2$ ou $x = 4$. $S_{\mathbb{R}} = \{-2, 3, 4\}$.

4) $x^6 - 5x^4 - 2x^2 + 24 = 0$.

Faisons le changement de variable $t = x^2$, l'équation devient $t^3 - 5t^2 - 2t + 24 = 0$ signifie $P(t) = 0$ signifie t = 3 ou t = -2 ou t = 4

t = 3 signifie $x^2 = 3$ signifie $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.

t = -2 signifie $x^2 = -2$ impossible.

t = 4 signifie $x^2 = 4$ signifie $x = -2$ ou $x = 2$. Ainsi $S_{\mathbb{R}} = \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$.

5) $Q(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x + 32$.

a) $Q(x)$ admet deux racines opposées, par exemple α et - α sont deux racines de $Q(x)$.

$Q(\alpha) = 0$ signifie $\alpha^4 - 2\alpha^3 - 12\alpha^2 + 8\alpha + 32 = 0$ (1)

$Q(-\alpha) = 0$

signifie$(-\alpha)^4 - 2(-\alpha)^3 - 12(-\alpha)^2 + 8(-\alpha) + 32 = 0$

signifie $\alpha^4 + 2\alpha^3 - 12\alpha^2 - 8\alpha + 32 = 0$ (2)

En faisons la différence des deux égalités(2) et (1) on obtient :

$4\alpha^3 - 16\alpha = 0$ signifie $4\alpha(\alpha^2 - 4) = 0$.

signifie $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2$ ou $\alpha = -2$

On vérifie que 0 n'est pas une racine de $Q(x)$, tandisque 2 et -2 le sont.

$Q(x) = (x-2)(x+2)(ax^2 + bx + c)$

$= (x^2 - 4)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^4 + bx^3 + (c - 4a)x^2 - 4bx - 4c$

Arithmétique

I) Résumé du cours

A) Division euclidienne

Définition :

Soient a et b 2 entiers tels que n $\neq$ 0. Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver l'unique couple (q,r) tel que a = bq+r avec 0≤r<n ; q est le quotient ; r est le reste

Remarque : si r = 0, on dit alors que b divise a ou a est divisible par b

Applications

1. la somme de 5 nombres consécutifs est divisible par 5
2. Si n divise a et n divise b alors n divise a+b et n divise ab
3. Soit n un entier pair n^2 est divisible par 4

Soit un entier impair, n^2-1 est divisible par 8(indication : montrer d'abord que le produit de 2 entiers consécutifs est un nombre pair)

4. a. Les restes possibles de la division euclidienne d'un entier naturel n par 3 sont 0 ou 1 ou 2

b. Pour tout entier naturel n on a : $n^3 - n$ est divisible par 3

6. a. Montrer que $\frac{4n+10}{n+1} = 4 + \frac{6}{n+1}$, en effet $4 + \frac{6}{n+1} = \frac{4n+4+6}{n+1} = \frac{4n+10}{n+1}$

b. En déduire les entiers naturels n tel que $\frac{4n+10}{n+1}$ soit un entier naturel

$n+1 \in D_6$ signifie que $n+1 \in \{1,2,3,6\}$ signifie que $n \in \{0,1,2,5\}$

B) Divisibilité par 2, 3, 4, 5, 8,9 et 25

Compléter :

1) Un entier est divisible par 3 si et seulement si ....

2) Un nombre est divisible par 4 si et seulement si..

3) Un entier est divisible par 5 si et seulement si ....

4) Un entier supérieur à 100 est divisible par 8 si et seulement si..................................

5) Un entier est divisible par 9 si et seulement si..

6) Un entier est divisible par 25 si et seulement si ....



C) Divisibilité par 11

n étant un nombre donné et ($a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots\ldots a_3 a_2 a_1$) son écriture décimale. On pose $d = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots\ldots + (-1)^{p-1} a_p$.

> Un entier est divisible par 11 si et seulement si d
> ($d = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots\ldots + (-1)^{p-1} a_p$) est divisible par 11

II) Exercices



1 Q-C-M

Soit a, b, q, r et d des entiers relatifs. Valider ou infirmer les propositions suivantes.

1) Si d divise a et b, alors d divise 3a +11b.
2) Si d divise a et b, d divise a – b et a + b.
3) si d divise a + b, alors d divise a et d divise b.
4) si d divise 2, alors d divise a.
5) si d divise a ou si d divise b, alors d divise ab.
6) si d divise ab, alors d divise a ou d divise b.
7) si d est un diviseur commun de 3a + 1 et 5a – 1, alors d divise 8.
8) si d divise a et b et si a = b q + r, alors d divise r.



2 VRAI-FAUX

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :
Si a divise b et c divise b alors ac divise b.



3 APPLIQUER

En utilisant la définition, démontrer que : si a divise b, alors a^2 divise b^2.



4 APPLIQUER

Démontrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par 4.



5 APPLIQUER

a, b, d et n sont des entiers naturels.

1) Démontrer que :

a) si d divise 3n + 4 et 9n – 5, alors d divise 17.

b) si d divise a et b, alors d divise 3a + 13b et a + 4b.

c) si 17 divise a – 5b, alors 17 divise 10a + b.

2) Démontrer la réciproque de la proposition b.



APPLIQUER

Soit n un entier naturel. Pour quelle(s) valeur(s) de n :

1) n divise-t-il n + 7 ?

2) n divise-t-il n + 12 ?

3) n + 11 est divisible par n – 1 ?



APPLIQUER

Les entiers naturels 109, 417, 271, 319 et 437 sont-ils premiers ?



APPLIQUER

Sans effectuer les calculs, indiquer si les nombres suivants sont divisibles par 3 et (ou) 9 et (ou) 11 ? 12627 ; 4983 ; 3948.



APPLIQUER

Sachant que : que 5n + 7 = 5(n + 1) + 2.

Peut-on en déduire que 2 est le reste de la division euclidienne de 5n + 7 par 5 ?

Peut-on en déduire que 2 est le reste de la division euclidienne de 5n + 7 par n + 1 ?



S'ENTRAINER

Déterminer les entiers relatifs n tel que n – 4 divise n + 2.



S'ENTRAINER

Quelles sont les valeurs que peut prendre un diviseur relatif commun à 5n – 3 et à2n – 3, ou n désigne un entier relatif ?



S'ENTRAINER

1) a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que a = 5b + 4. Peut-on affirmer que 4 est le reste de la division de a par 5 ? de a par b ?

2) n étant un entier naturel non nul, quel est le reste de division euclidienne de la division euclidienne de 22n + 19. a) par 22 ? b) par 11 ? c) par 11n ?



S'ENTRAINER

Montrer que, si un entier naturel divise à la fois les entiers 5n + 9 et 2n + 3, ne peut prendre que deux valeurs que l'on précisera.



S'ENTRAINER

1) Déterminer les chiffres x et y pour que le nombre 33y262x soit divisible par 25 et par 11.

2) Chercher les entiers naturels n pour que n+2 divise 3n+10.

3) Soient A=3n−5 et B=2n−7 où n est un entier naturel et d un diviseur de A et B.

a) Montrer que d divise 11.

b) Déduire les valeurs de d.



S'ENTRAINER

1) Soit le nombre $N = \overline{x3y4}$ à quatre chiffres.
Déterminer x et y pour que N soit divisible par 3 et 4.

2) Déterminer le chiffre x pour que le nombre $N' = \overline{x304}$ soit divisible par 11.



SEPERFECTIONNER

Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, le nombre n (n + 1) (n + 5) est divisible par 6.



SEPERFECTIONNER

Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, $7^n - 3^n$ est divisible par 4.



Q-C-M

1) 2) si d divise a et b alors d divise toute combinaison linéaire de a et b donc en particulier 3a + 11b ; a – b et a + b.
3) Faux si a = 1 et b = 3 ; 2 divise a + b et ne divise ni a ni b.
4) Faux si d = 2 et a = 3, d divise 2a, et d ne divise pas a.
5) si d divise a alors il existe un entier q tel que a = d q donc ab = d q b, alors d divise a b. (De même si d divise b).
6) Faux si d = 6 et a = 4 et b = 3, alors ab = 12 donc d divise ab, et d ne divise ni a ni b.
7) 5(3a + 1) – 3(5a – 1) = 8 : si d est un diviseur commun de 3a + 1 et 5a – 1, alors d divise toute combinaison linéaire de ces nombres en particulier 5(3a + 1) – 3(5a – 1) donc d divise 8.
8) si d divise a et b et si a = b q + r, alors d divise toute combinaison linéaire de ces nombres en particulier a – b q or r = a – b q donc d divise r.



VRAI-FAUX

C'est Faux ! Pour justifier, il suffit d'exhiber un contre-exemple : 4 divise 36 et 6 divise 36 mais $4\times 6 = 24$ ne divise pas 36.



APPLIQUER

Si a divise b, alors il existe un entier q tel que b = a q. Par suite, $b^2 = a^2 q^2$ et comme q^2 est un entier, ce ci prouve que a^2 divise b^2.



APPLIQUER

Deux nombres impairs consécutifs peuvent s'écrire 2n + 1 et 2n + 3 (pensez aussi à
2n – 1 et 2n + 1). 2n + 1 + 2n + 3 = 4n + 4=4(n + 1). Puisque n + 1 est un entier, ceci prouve que la somme est divisible par 4.

5 APPLIQUER

1)a) si d divise 3n + 4 et 9n – 5, alors d divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres en particulier. N = 3(3n – 4)-(9n – 5) = 17, donc d = 1 ou d = 17
b) si d divise a et b, alors d divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres en particulier 3a + 13 b et a + 4b.
c) si 17 divise a – 5b, il existe un entier naturel q tel que a – 5b = 17q donc
a=17q +5b ;10a+b=170q + 50b + b=17(10q + 3b) ;
10q + 3b est un entier naturel donc 17 divise 10a + b.
2) si 17 divise 10a + b, il existe un entier naturel q tel que 10a + b = 17q donc
b = 17q – 10a ;
a – 5b=a - 17× 5q + 50a = 17(3a– 5q);
3a – 5q est un entier naturel donc 17 divise a – 5b.



APPLIQUER

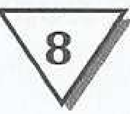
1) si n divise n+7 alors n divise n + 7 – n donc divise 7 donc n = 1 ou n=7
2) si n divise n + 12 alors n divise n + 12 – n donc divise 12 donc n = 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 6 ou 12.
3) si n – 1 divise n + 11, n – 1 divise n + 11 – (n – 1) donc n – 1 divise 12.

n - 1	1	2	3	4	6	12
n	2	3	4	5	7	13



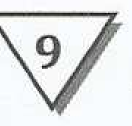
APPLIQUER

$11^2 > 109$: 109 n'est pas divisible par 2, 3, 5,7 donc est premier.
417 est divisible par 3 donc n'est pas premier.
$17^2 > 271$: 271 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 11, 13 donc est premier.
437 = 19 × 23 donc n'est pas premier.
319 = 11 × 29 donc n'est pas premier.



APPLIQUER

1+ 2 + 6 + 2 + 7 = 18 donc 12627 est divisible par 3 et par 9.
1 + 6 + 7 – (2 + 2) = 10 donc 12627 n'est pas divisible par 11.
4 + 9 + 8 + 3 = 24 donc 4983 est divisible par 3 mais pas par 9.
4 + 8 – (9 + 3) = 0 donc 4983 est divisible par 11.
3 + 9 + 4 + 8 = 29 donc 3948 est divisible par 3 mais pas par 9.
3 + 4 – (9 + 8) = -10 donc 3948 n'est pas divisible par 11.



APPLIQUER

On sait que $0 \leq 2 < 5$ donc 2 est bien le reste de la division euclidienne de 5n + 7 par 5, mais, si n = 0

ou n = 1 on n'a pas 2 < n + 1. Dans ces deux cas, 2 ne peut pas être le reste



10 S'ENTRAINER

Si n–4 divise n+2, étant donné qu'il divise aussi n–4, alors il divise la différence de ces deux nombres : (n + 2) – (n – 4) = 6.
Réciproquement : si n – 4 divise 6, sachant qu'il divise n – 4, alors n divise la somme de ces deux nombres : 6 + n – 4 = n + 2.
Bilan : n – 4 divise n + 2 ⟺ n – 4 divise 6 ⟺ n – 4 ∈{1 ; 2 ; 3 ; 6}
n – 4 divise n + 2 ⟺ n ∈ {5 ; 6 ; 7 ; 10}.



11 S'ENTRAINER

Tout diviseur d commun à 5n – 3 et 2n – 3 divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de ces deux nombres, donc d divise, entre autres :
2(5n – 3) – 5(2n – 3) = 10n – 6 – 10n + 15 = 9. d ne peut donc prendre que 3 valeurs : 1, 3 et 9.



12 S'ENTRAINER

1) oui 4 est le reste de la division de a par 5 $(0 \le r < 5)$.
Non pas forcément : si $1 \le b \le 4$ on n'a pas $0 \le 4 < b$.
2) a) r=19
b) 22n + 19 = 11(2n + 1) + 8 donc r = 8.
c) si x ≥ 2, 11n ≥ 22 donc r = 19, si n = 1, r = 8 (voir b).



13 S'ENTRAINER

Si un entier naturel d divise à la fois 5n + 9 et 2n + 3, alors d divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de ces deux nombres, donc d divise, entre autres :
2(5n + 9) – 5(2n + 3) = 10n + 18 – 10n – 15 = 3.
3 n'a que deux diviseurs : 1 et 3 donc d ne peut prendre que ces deux valeurs.



14 S'ENTRAINER

1) Le nombre 33y262x est divisible par 25 donc x=5 ; pour x=5, le nombre 33y2625 est divisible par 11 si : 5+6+y+3–(2+2+3)=14+y–7=7+y est divisible par 11, soit donc y=4

Ainsi pour x=5 et y=4, le nombre 3342625 est divisible par 25 et 11.

2) On a pour n∈ IN ; $\frac{3n+10}{n+2}=\frac{3(n+2)+4}{n+2}=3+\frac{4}{n+2}$, donc n+2 divise 3n+10 si et seulement si n+2 $\in D_4=\{1,2,4\}$ donc n $\in\{0,2\}$

3) a) d divise A et B, donc d divise 2A–3B=2(3n–5)–3(2n–7)=6n–10–6n+21=11

b) d $\in D_{11}=\{1,11\}$



15 S'ENTRAINER

1) $N=\overline{x3y4}$ est divisible par 4 donc y=0, ou y=2 ou y=4 ou y=6 ou y=8
Pour y=0, N est divisible par 3 donc x=2 ou x=5 ou x=7
Pour y=2, N est divisible par 3 donc x=0 ou x=3 ou x=6 ou x=9
Pour y=4, N est divisible par 3 donc x=1 ou x=4 ou x=7
Pour y=6, N est divisible par 3 donc x=2 ou x=5ou x=8
Pour y=8, N est divisible par 3 donc x=0 ou x=3 ou x=6 ou x=9
2) le nombre N'= $\overline{x304}$ est divisible par 11 soit donc 4+3–0–x=7–x est divisible par 11, soit x=7.
Le nombre N'=7304 est donc divisible par 11.



16 SE PERFECTIONNER

On procède par disjonction des cas, en remarquant qu'un entier, dans la division par 6, a six restes possibles : 0, 1, 2, 3, 4, et 5 d'où six cas :
1) ou bien n = 6q alors n(n + 1)(n + 5) = 6q(n + 1)(n + 5) et comme q(n + 1)(n + 5) est bien divisible par 6.
2) ou bien n = 6q + 1, alors n(n + 1)(n + 5) = n(n + 1)(6q + 1 + 5) = n(n + 1)(6q + 6) = 6n(n + 1)(q + 1) et comme n(n + 1)(q + 1) est un entier, n(n + 1)(n + 5) est divisible par 6.
3) ou bien n = 6q + 2, alors n(n + 1)(n + 5) = (6q + 2)(6q + 2 + 1)(n + 5) =
(6q + 2)(6q + 3)(n + 5) = 6(3q + 1)(2q + 1)(n + 5) et comme (3q + 1)(2q + 1)(n + 5) est un entier, n(n + 1)(n + 5) est divisible par 6.

4) ou bien n = 6q +3, alors n(n + 1)(n + 5) = (6q + 3)(6q + 3 + 1)(n + 5) =
(6q + 2)(6q + 4)(n + 5) = 6(3q + 1)(3q + 2)(n + 5)
et comme (3q + 1)(3q + 2)(n + 5) est un entier, n(n + 1)(n + 5) est divisible par 6.

5) ou bien n = 6q + 4 , alors n(n + 1)(n + 5) = (6q + 4)(n + 1)(6q + 4 + 5) =
(6q + 4)(n + 1)(6q + 9) = 6(3q + 2)(n + 1)(2q + 3)
et comme (3q + 2)(n + 1)(2q + 3) est un entier, n(n + 1)(n + 5) est divisible par 6.

6) ou bien n = 6q + 5, alors n(n + 1)(n + 5) = n(6q + 5 + 1)(n + 1) = n(6q + 6)(n + 1) =6n(q + 1)(n + 5) et comme n(q + 1)(n + 5) est un entier, n(n + 1)(n + 5) est divisible par 6.

Bilan : dans tous les cas, n(n + 1)(n + 5) est divisible par 6.



17 *SE PERFECTIONNER*

On peut utiliser une identité remarquable : Pour n entier supérieur ou égal à 2 :

$$7^n - 3^n = (7-3)\left(7^{n-1} + 7^{n-2} \times 3 + ... + 7 \times 3^{n-2} + 3^{n-1}\right)$$

$$= \underbrace{4 \times \left(7^{n-1} + 7^{n-2} \times 3 + ... + 7 \times 3^{n-2} + 3^{n-1}\right)}_{entier}$$

Donc $7^n - 3^n$ est divisible par 4.

Suite arithmétique- suite géométrique

I) Résumé du cours :

A) Suites arithmétiques

1) *Définition :*

On dit que la suite de nombres (u_n) **est une suite arithmétique de raison r si et seulement si** $u_{n+1} = u_n + r$

2) *Propriétés des suites arithmétiques :*

Soit u_n le terme de la suite arithmétique au rang n, si u_0 est le premier terme de cette suite et r la raison alors : $u_n = u_0 + (n-0) \times r = u_0 + n \times r$

3) *Représentation graphique :*

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 ;Les points $M(n,u_n)$ sont sur la droite d'équation y=rx+ u_0

4) *Somme des termes d'une suite arithmétique :*

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 et S_0 la somme de ses premiers termes jusqu'au rang p , alors : $S_p = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{p-1} + u_p$

$$S_p = (\text{Nombre de terme}(u_n)\text{intervenant dans la somme}) \times \frac{(\text{le premier terme de la somme} + \text{ le dernier terme de la somme})}{2}$$

Soit (u_n) le terme de la suite arithmétique au rang n, u_1 est le premier terme de cette suite et r la raison alors : $u_n = u_1 + (n-1) \times r$

Soit (u_n) le terme de la suite arithmétique au rang n, si u_2 est le premier terme de cette suite et r la raison alors : $u_n = u_2 + (n-2) \times r$

Plus généralement :

Soit (u_n) le terme de la suite arithmétique au rang n, si u_1 est le premier terme de cette suite et r la raison alors : $u_n = u_k + (n-k) \times r$

Remarques :

moyenne arithmétique : Si a,b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors $b = \frac{a+c}{2}$

De manière plus générale, si $u_p, u_{p+1}\dots\dots\dots, u_{p+n}$ sont n+1 termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors la moyenne arithmétique de ces termes est la moyenne arithmétique des termes extrêmes : $\frac{u_p + u_{p+n}}{2}$

B) Suites géométriques

1) *Définition :*

Une suite de terme général u_n est une suite géométrique si chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par une constante. Cette constante est alors appelée raison de la suite. $u_{n+1} = u_n + q$ avec q constante (raison de la suite)

De même que la suite arithmétique, la suite géométrique est déterminée par la donnée de son premier terme et sa raison.

Pour prouver qu'une suite est géométrique, il faut démontrer que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant (indépendant de n)

Exemples :

La suite des nombres 1 2 4 8 16 32 64 128 sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison 2

1 -1 1 -1 1 -1 1……sont les termesconsécutifs d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison -1

La suite des nombres $1\ -\frac{1}{4}\ \frac{1}{16}\ -\frac{1}{64}\ \frac{1}{256}\ -\frac{1}{1024}$ …sont les termesconsécutifs d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison $-\frac{1}{4}$

2) *Expression du terme général d'une suite géométrique :*

$u_1 = u_0 \times q$; $u_2 = u_0 \times q \times q$; $u_3 = u_0 \times q^2 \times q$; $u_4 = u_0 \times q^3$; $u_n = u_0 \times q^n$; $u_n = u_m \times q^{n-m}$

Exemples :

$u_{10} = u_6 \times q^4$; $u_{15} = u_{11} \times q^4$; $u_{26} = u_{12} \times q^{14}$

Application1:

Les suites suivantes sont géométriques. Exprimer u_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 = -2$ et la raison est $-\frac{1}{2}$
2. $u_0 = -1$ et la raison est -1

Solution :

$u_n = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$; $u_n = -1(-1)^n = (-1)^{n+1}$

Application 2

Les suites suivantes, de terme général u_n sont géométriques de raison b. Déterminer l'entier i dans chacun des cas suivants :

1) $u_0 = 4, u_4 = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$

2) $u_1 = \frac{2}{3}, u_5 = \frac{8}{243}, u_i = \frac{4}{27}$

3) $u_3 = -16, u_7 = -1, u_i = \frac{1}{8}$

Solution :

1) $u_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $u_i = 4\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{4}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$ donc $2^i = 2^4$ donc i=4

Essayons de déterminer b : $u_5 = u_1 \times b^4 = \frac{2}{3} \times b^4 = \frac{8}{243}$

$\frac{2}{3} \times b^4 = \frac{8}{243}$ donc $b^4 = \frac{8\times 3}{243\times 2} = \frac{4}{81} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4$ donc $b = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ou $b = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

Si $b = \frac{\sqrt{2}}{3}$ alors $u_i = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $u_i = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{i-1} = \frac{4}{27}$ donc $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{i-1} = \frac{2}{9}$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{i-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$ donc i-1=2 donc i=3

On obtient le même résultat en prenant b=- $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

2) $u_7 = u_3 \times b^4 = -16 \times b^4 = -1$ donc $b^4 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$. On a $b = \frac{1}{2}$ ou $b = -\frac{1}{2}$; $u_i = u_7 \times b^{i-7}$

$\frac{1}{8} = (-1)b^{i-7}$

On étudie les 2 cas :

Si $b = \frac{1}{2}$ alors $\frac{1}{8} = (-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{i-7}$; $-\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-7}$ n'a pas de solution car $\left(\frac{1}{2}\right)^{i-7}$ est positif.

Si $b = -\frac{1}{2}$ alors $\frac{1}{8} = (-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-7}$; $-\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-7}$ donc i−7=3 soit i=10

Remarque : Moyenne géométrique :

Si a,b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors $b^2=ac$

Si trois nombres positifs a,b et c vérifient $b^2=ac$, on dit que b est la moyenne géométrique de a et c.

3) *Sommes des termes consécutifs d'une suite géométrique :*

Si u_n est le terme général d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Plus généralement :

$$\text{Somme des termes consécutifs} = 1^{er}\text{ terme } \frac{1-raison^{nbre\ de\ termes}}{1-raison}$$

Application:

Calculer les sommes suivantes:

1. $S=2+4+8+...+256$
2. $S'=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{128}$
3. $S''=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{10^5}$

Solution :

1) $S=2+4+8+...+256$

$S=2+2^2+2^3+....+2^8$

C'est la somme de 8 termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 2.

$$S=2\frac{1-2^8}{1-2}=2\frac{1-256}{1-2}=510$$

2) $S'=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{128}$;

$$S'=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{64}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

C'est la somme de 4 termesconsécutifs d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

$$S'=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{256}\right) \ ; \ S'=\frac{2}{3}\times\frac{255}{256}=\frac{85}{128}$$

3) $S''=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+...+\frac{1}{10^5}$: c'est la somme de 6 termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{10}$; $S''=1\times\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^6}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1-0.000001}{0.9}=\frac{0.999999}{0.9}=1.11111$

En résumé :

Suite arithmétiques et suites géométriques :

Suites arithmétiques	***Suite géométriques***
$u_{n+1}=u_n+r$ $u_{n+1}-u_n=cte\ \forall n\in IN$ $u_n=u_0+nr$ ou $u_n=u_p+(n-p)r$ $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ $S_n=u_0+u_1+....+u_n=(n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}$ D'une façon générale : $S_n=N\times\frac{1^{er}\ terme+dernier\ terme}{2}$ Ou N est le nombre de termes	$u_{n+1}=q\times u_n$ et un premier. q est la raison $\frac{u_{n+1}}{u_n}=cte\ \forall n\in IN$ $u_n=u_0+q^n$ ou $u_n=u_p\times q^{n-p}$ $1+q+q^2+...+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $S_n=u_0+u_1+....+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $S_n=1^{er}$ terme $\times\frac{1-q^{nbre\ de\ termes}}{1-q}$

II) Exercices



Q-C-M ; VRAI-FAUX

Répondez par vrai ou faux

1) U_n désignera une suite arithmétique de raison a et de 1ère termeU_0

i. Si $U_0 = 2$ et que a = 4 alors U_{10} est égale à :

a) 42 b) 24 c) 12

ii. Si $U_1 = 5$ et que a = -2 alors U_8 est égale à :

a) -11 b) -9 c) 19

iii. Si $U_7 = 79$ et que $U_8 = 82$ alors a est égale à :

a) 3 b) 1 c) -2

iv. Si $U_{10} = 4$ et que $U_{35} = 54$ alors a est égale à :

a) 50 b) 2 c) 25

v. Si $U_0 = 5$ et que $a = \frac{1}{3}$. Quel nombre n'appartient pas à cette suite

a) $\frac{14}{3}$ b) $\frac{23}{3}$ c) 8

2) U_n désignera une suite géométrique de raison b et de 1er terme U_0

i. Si $U_0 = \frac{1}{8}$ et que b = 2 alors U_{10} est égale à :

a) 1024 b) 128 c) 20.15

ii. Si $U_0 = \frac{1}{2}$ et que $U_1 = 4$ alors b est égale à :

a) 8 b) 2 c) 4

iii. Si $U_5 = 1$ et que $b = \frac{1}{2}$. quelle nombre correspond à U_1

a) 12 b) 15 c) 16

iv. Soit $S = 2+4+8+......+256$ alors :

a) S = 510 b) 640 c) 320

v. Si $U_n = \sqrt{7^n}$, n ∈IN alors :

a) $U_0 = \sqrt{7}$ et b = 7 b) $U_0 = \sqrt{7}$ et b = $\sqrt{7}$ c) $U_0 = 1$ et b = $\sqrt{7}$



APPLIQUER

Soit la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3-U_n} \end{cases}$ pour n ∈ IN

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) la suite U est-elle arithmétique ?est-elle géométrique ?

2) on définit la suite V définie sur IN par $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n - 1}$

a) Calculer V_0, V_1 et V_2

b) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Exprimer V_n en fonction de n.

d) On déduire que : $U_n = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1}$

3) On pose $S_n = \frac{1}{1-U_0} + \frac{1}{1-U_1} + ... + \frac{1}{1-U_n}$.Montrer que $S_n = 2^{n+2} - n - 3$



APPLIQUER

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 6}{u_n - 1}$

1) Calculez u_1, u_2 et u_3.

2) On note (u_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$

Démontrer que pour tout $n \in IN$, $u_n = \dfrac{2v_n - 3}{v_n - 1}$.

3) En déduire une expression de u_n en fonction de n.



APPLIQUER

Après avoir identifié si on utilise une somme de termes de suites géométriques ou arithmétiques, calculer les sommes ci-dessous :

1) $S_1 = 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + ... + 8\sqrt{2}$

2) $S_2 = 1 + x + x^2 + ... + x^{50}$ $(x \neq 1)$

3) $S_3 = a + 2a + 3a + 4a + ... + 275a$



APPLIQUER

On note $(A_n)_{n \in IN}$ la suite définie par $A_0 = 1$ et $A_{n+1} = A_n - \dfrac{3}{5} \times (2)^n$

Exprimer A_n en fonction de n.



S'ENTRAINER

(U_n) est une suite arithmétique définie sur IN* par : $u_1 = 2$ et $u_4 + u_7 = 31$

1) a) Déterminer la raison r de cette suite

b) Calculer u_n en fonction de n

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \dfrac{1}{u_1 u_2} + \dfrac{1}{u_2 u_3} + \dfrac{1}{u_3 u_4} + ... + \dfrac{1}{u_n u_{n+1}}$

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*;\ \dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k+1}} = \dfrac{r}{u_k u_{k+1}}$

b) Déduire que $T_n = \dfrac{n}{6n + 4}$



S'ENTRAINER

On considère la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{3-2U_n} \end{cases}$

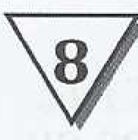
1) Montrer que la suite U n'est pas arithmétique.

2) Soit la suite V définie sur IN par $V_n = \dfrac{3}{U_n}$ pour tout $n \in$ IN

a) Montrer que V est une suite arithmétique et exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

b) Calculer la somme $S = V_0 + V_1 + ... + V_{45}$

c) En déduire la somme $S' = \dfrac{1}{U_2} + \dfrac{1}{U_3} + \dfrac{1}{U_4} + ... + \dfrac{1}{U_{45}}$



S'ENTRAINER

On considère la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{4}{4-U_n} \end{cases}$

1) Montrer que la suite U n'est pas arithmétique.

2) Soit la suite V définie sur IN par $V_n = \dfrac{2}{2-U_n}$.

a) Montrer que V est une suite arithmétique.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Calculer en fonction de n la somme $S = V_0 + V_1 + ... + V_n$

3) Calculer en fonction de n le produit $P_n = U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$.



SEPERFECTIONNER

Calculer $S = 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - ..... + 6561$ et $S' = 1 + 2 + 3 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{81} - ..... + \dfrac{1}{6561}$



SEPERFECTIONNER

Soit U la suite géométrique de raison q = 2 et de premier terme $U_0 = 1$.

1) Déterminer U_n en fonction de n.

2) Soit la suite V définie par: $\begin{cases} V_0 = \dfrac{3}{2} \\ V_{n+1} = 2V_n + U_n \end{cases}$

a) Calculer V_1 et V_2.

b) Montrer que la suite V est ni arithmétique ni géométrique.

3) Soit la suite W définie sur IN par $W_n = \dfrac{V_n}{U_n}$.

a) Montrer que W est une suite arithmétique.

b) Exprimer W_n en fonction de n et en déduire V_n en fonction de n.

4) Calculer la somme S = $\sum_{k=0}^{10} \dfrac{V_k}{U_k}$



SEPERFECTIONNER

Soit u la suite définie sur IR par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$ et la suite v définie par $v_n = u_n - \dfrac{5}{2}$

1) Montrer que la suite u est ni arithmétique ni géométrique

2) Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison q.

3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

4) a) Déterminer les réels a et b tels que : $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n = a\, q^{n+1} + b$

b) En déduire la somme : $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$

5) Lundi à 08 h du matin, un premier élève apprend que le prof est absent, dans les trois minutes qui suivent il communique la nouvelle à trois autres élèves. Chacun de ces élèves s'empressent de le dire lui aussi à trois autres élèves dans les trois minutes qui suivent, et ainsi de suite ... chaque élève qui apprend la nouvelle, la communique au bout de trois minutes à trois autres ...

Le lycée compte 2000 élèves. A quelle heure, est-on sûr que tous les élèves seront au courant de la nouvelle.



VRAI-FAUX ; Q-C-M

1) i) 42 ii) -9 iii) 3 iv) 2 v) $\frac{14}{3}$

2) i) 128 ii) 2 iii) 16 iv) 510 v) $U_0 = 1$ et b = $\sqrt{7}$



APPLIQUER

1)a) $U_1 = \frac{2}{3-U_0} = \frac{2}{3}$; $U_2 = \frac{2}{3-U_1} = \frac{2}{3-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{7}{3}} = \frac{6}{7}$

b) * $U_1 - U_0 = \frac{2}{3}$; $U_2 - U_1 = \frac{6}{7} - \frac{2}{3} = \frac{4}{21}$

$U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1 \Rightarrow (U_n)_n$ n'est pas une suite arithmétique

$* \frac{U_2}{U_1} = \frac{6}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{7}$

calculons :

$U_3 = \frac{2}{3-U_2} = \frac{2}{3-\frac{6}{7}} = \frac{2}{\frac{15}{7}} = \frac{14}{15}$

$\frac{U_3}{U_2} = \frac{14}{15} \times \frac{7}{9} = \frac{98}{135}$;

$\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_3}{U_2}$

$\Rightarrow (U_n)$ n'est pas une suite géométrique

2)a) $V_0 = \frac{U_0 - 2}{U_0 - 1} = 2$; $V_1 = \frac{U_1 - 2}{U_1 - 1} = \frac{\frac{2}{3} - 2}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{\frac{-4}{3}}{\frac{-1}{3}} = 4$;

$V_2 = \frac{U_2 - 2}{U_2 - 1} = \frac{\frac{6}{7} - 2}{\frac{6}{7} - 1} = \frac{\frac{-8}{7}}{\frac{-1}{7}} = 8$

b) $V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} - 1} = \frac{\frac{2}{3-U_n} - 2}{\frac{2}{3-U_n} - 1} = \frac{2-6+2U_n}{2-3+U_n}$

$= \frac{-4+2U_n}{-1+U_n} = 2\frac{(U_n - 2)}{U_n - 1} = 2V_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison q=2

c) $V_n = q^n V_0 = 2^n \times 2 = 2^n \times 2^1 = 2^{n+1}$

d) on a

$V_n = \frac{U_n - 2}{U_n - 1} \Leftrightarrow V_n(U_n - 1) = U_n - 2$

$\Leftrightarrow U_n(V_n - 1) = V_n - 2 \Leftrightarrow U_n = \frac{V_n - 2}{V_n - 1}$

Donc $U_n = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1}$

3) $S_n = \frac{1}{1-U_0} + \frac{1}{1-U_1} + \ldots + \frac{1}{1-U_n}$ on a

$U_n = \frac{V_n - 2}{V_n - 1} \Leftrightarrow 1 - U_n = 1 - \frac{V_n - 2}{V_n - 1} = \frac{V_n - 1 - V_n + 2}{V_n - 1} = \frac{1}{V_n - 1}$

donc $\frac{1}{1-U_n} = V_n - 1$

Ainsi $S_n = (V_0 - 1) + (V_1 - 1) + \ldots + (V_n - 1)$

$= V_0 + V_1 + \ldots + V_n - (1+1\ldots+1)$

$= V_0 \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - (n+1) = 2\frac{1-2^{n+1}}{-1} - (n+1)$

$= -2 + 2^{n+2} - n - 1 = 2^{n+2} - n - 3$



APPLIQUER

1. $u_1 = \frac{4u_0 - 6}{u_0 - 1} = \frac{4\times 6 - 6}{6-1} = \frac{18}{5}$

$u_2 = \frac{4u_1}{u_1 - 1} = \frac{4\times\frac{18}{5} - 6}{\frac{18}{5} - 1} = \frac{42}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{42}{13}$

$u_3 = \frac{4u_2 - 6}{u_2 - 1} = \frac{4\times\frac{42}{13} - 6}{\frac{42}{13} - 1} = \frac{90}{13} \times \frac{13}{29} = \frac{90}{29}$

2. On note (u_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$

Calculer v_0, v_1 et v_2

$v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 - 2} = \frac{6-3}{6-2} = \frac{3}{4}$

Démontrer que pour tout $n \in IN$, $u_n = \frac{2v_n - 3}{v_n - 1}$.

On sait que $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$

$\Leftrightarrow v_n(u_n - 2) = u_n - 3 \Leftrightarrow v_n u_n - 2v_n = u_n - 3$

$\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = 2v_n - 3 \Leftrightarrow u_n v(u_n - 1) = 2v_n - 3$

Or $u_n - 3 \neq u_n - 2$ donc $u_n \neq 1$ donc on peut-diviser par $u_n - 1$, on obtient donc : $u_n = \frac{2v_n - 3}{v_n - 1}$

3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

$u_n = \frac{2v_n - 3}{v_n - 1} = \frac{2\times\frac{3}{2^{n+2}}}{\frac{3}{2^{n+2}} - 1} = \frac{\frac{6}{2^{n+2}} - 3}{\frac{3}{2^{n+2}} - 1}$



APPLIQUER

1) $S_1 = 1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+...+8\sqrt{2}$

S_1 est la somme des è premiers termes d'une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 1.

$S_1 = 1\times\frac{1-\left(\sqrt{2}\right)^8}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-16}{1-\sqrt{2}}$

$= -15\times\frac{1\times\left(1+\sqrt{2}\right)}{1-2} = 15\left(1+\sqrt{2}\right) = 15+15\sqrt{2}$

2) $S_2 = 1+x+x^2+...+x^{50}$

$S_1 = \sum_{k=0}^{50}\left(\sqrt{2}\right)^k = 1\times\frac{1-x^{51}}{1-x} = \frac{1-x^{51}}{1-x}$

3) $S_3 = a+2a+3a+4a+...+275a$

S_3 est la somme des 275 premiers termes d'une suite arithmétique de raison a et de premier terme a: $S_3 = 275\times\frac{a+275a}{2} = 37950a$

5 APPLIQUER

$A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + ... + A_1$

$= A_{n-1} + A_{n-2} + ... + A_1 + A_0 - \frac{3}{5}\times2^{n-1} - \frac{3}{5}\times2^{n-2} + ... - \frac{3}{5}\times2^0$

donc : $A_n = A_0 - \frac{3}{5}\times2^{n-1} - \frac{3}{5}\times2^{n-2} + ... - \frac{3}{5}\times2^0$

donc $A_n = 1 - \frac{3}{5}\times2^{n-1} - \frac{3}{5}\times2^{n-2} + ... - \frac{3}{5}\times2^0$



S'ENTRAINER

1)a) $U_4 = U_1 + 3r$ et $U_7 = U_1 + 6r$ donc $U_4 + U_7 = 2U_1 + 9r \Rightarrow 31 = 4 + 9r \Rightarrow 9r = 27$

$\Rightarrow r = 3$

b) (U_n) est une suite arithmétique donc $U_n = U_1 + (n-1)r \Rightarrow U_n = 2 + 3(n-1) \Rightarrow U_n = 3n-1$

2)a) soit $k \in IN^*$, $\frac{1}{U_k} - \frac{1}{U_{k+1}} = \frac{U_{k+1}U_k}{U_kU_{k+1}} = \frac{r}{U_kU_{k+1}}$

b) $3T_n = \frac{3}{U_1U_2} + \frac{3}{U_2U_3} + ... + \frac{3}{U_nU_{n+1}}$

$= \frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_2} - \frac{1}{U_3} + ... + \frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_{n+1}}$

$= \frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3(n+1)-1}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} = \frac{3n+2-2}{2(3n+2)} = \frac{3n}{2(3n+2)}$

$\Rightarrow 3T_n = \frac{3n}{2(3n+2)} \Rightarrow T_n = \frac{n}{6n+4}$

7 S'ENTRAINER

1) $U_1 = \frac{3U_0}{3-2U_0} = \frac{3}{1} = 3$; $U_2 = \frac{3U_1}{3-2U_1} = \frac{9}{3-6} = -3$

$U_1 - U_0 = 3 - 1 = 2$; $U_2 - U_1 = -3 - 1 = -4$,

donc $(U_n)_n$ n'est pas une suite arithmétique

2)a) $V_{n+1} = \frac{3}{U_{n+1}} = \frac{3(3-2U_n)}{3U_n} = \frac{3-2U_n}{U_n}$

$= \frac{3}{U_n} - 2 = V_n - 2$, donc $(V_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$

$V_n = V_0 + nr = 3 - 2n$ On a $U_n = \frac{3}{V_n} = \frac{3}{3-2n}$

b) $S = V_0 + ... + V_{45} = \frac{(V_0 + V_{45})\times46}{2}$

$= \frac{(3+3-90)\times46}{2} = \frac{84\times46}{2} = -1932$

c) $S' = \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_3} + ... + \frac{1}{U_{45}}$

$= \frac{1}{3}V_2 + \frac{1}{3}V_3 + ... + \frac{1}{3}V_{45} = \frac{1}{3}(V_2 + V_3 + ... + V_{45})$

$S' = \frac{1}{3}(S - V_0 - V_1) = \frac{1}{3}(-1932-3-1)$

$\Rightarrow S' = \frac{-1936}{3}$



S'ENTRAINER

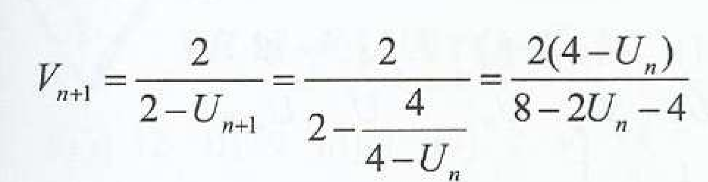
1) $U_1 = \frac{4}{4-U_0} = 1$, $U_2 = \frac{4}{4-U_1} = \frac{4}{3}$

$U_1 - U_0 = 1$, $U_2 - U_1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

$U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1 \Rightarrow (U_n)_n$

n'est pas une suite arithmétique

2)a) $= \frac{4-U_n}{2-U_n} = \frac{2}{2-U_n} + \frac{2-U_n}{2-U_n} = 1 + V_n$



$V_{n+1}=\frac{2}{2-U_{n+1}}=\frac{2}{2-\frac{4}{4-U_n}}=\frac{2(4-U_n)}{8-2U_n-4}$

Donc $V_{n+1}-V_n=1$

$\Rightarrow (V_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r=1$

b) $V_n=V_0+nr=1+n$,

on a $V_n=\frac{2}{2-U_1}\Rightarrow (2-U_n)V_n=2$

$\Rightarrow 2V_n-U_nV_n=2\Rightarrow U_n=\frac{2V_n-2}{V_n}$

$\Rightarrow U_n=\frac{2(n+1)-2}{n+1}=\frac{2n}{n+1}$

c) $S=V_0+V_1+...+V_n$

$=\frac{(V_0+V_n)(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

3) $P_n=U_1\times U_2\times...\times U_n$

On a :

$U_n=2-\frac{2}{V_n}=2\left(1-\frac{1}{V_n}\right)$

donc $P_n=2\left(1-\frac{1}{V_1}\right)\times 2\left(1-\frac{1}{V_2}\right)\times....\times 2\left(1-\frac{1}{V_n}\right)$

$=2^n\left(1-\frac{1}{V_1}\right)\times\left(1-\frac{1}{V_2}\right)\times....\times\left(1-\frac{1}{V_n}\right)$

$=2^n\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times....\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$=2^n\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}....\times\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}}\times\frac{\cancel{n}}{n+1}$

$=2^n\times\frac{1}{n+1}=\frac{2^n}{n+1}$



9 SE PERFECTIONNER

$S=1-3+9-27+81-...+6561$

$=1-3+3^2-3^3+3^4-...+3^8$

$=(1+3^2+3^4+3^6+3^8)-(3+3^3+3^5+3^7)$

Soit $V_n=3^n$; $n\in IR$

V_n est une suite géométrique de raison 3 et de 1er terme $V_0=1$

$1+3^2+3^4+...+3^8=V_0+V_2+V_4+V_6+V_8=V_0\frac{1-3^5}{1-3}=\frac{1-3^5}{-2}$

$3+3^3+3^5+3^7=V_1+V_3+V_5+V_7=V_1\frac{1-3^4}{-2}$

$=3\times\frac{1-3^4}{-2}\Rightarrow S=\frac{3^5-1}{2}-\frac{3-3^5}{-2}=\frac{3^5-1}{2}-\frac{3^5-3}{2}=\frac{-1+3}{2}=1$

$S'=1+2+3-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-...+\frac{1}{6561}$

$=1+2+3-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}-...+\frac{1}{3^8}$

$=1+2+3-\frac{3^7}{3^8}+\frac{3^6}{3^8}-\frac{3^5}{3^8}+\frac{3^4}{3^8}-...+\frac{1}{3^8}$

$=1+2+3+\frac{1+3^2+3^4+3^6}{3^8}-\frac{3+3^3+3^5+37}{3^8}$

$=6+\frac{V_0+V_2+V_4+V_6}{3^8}-\frac{V_1+V_3+V_5+V_7}{3^8}$

$V_0+V_2+V_4+V_6=V_0\frac{1-3^4}{-2}=\frac{3^4-1}{2}$

$V_1+V_3+V_5+V_7=V_1\frac{1-3^4}{-2}=3\frac{3^4-1}{2}$

$S'=6+\frac{3^4-1}{2}-\frac{3^5-3}{2}=\frac{12+3^4-1-3^5+3}{2}$

$=\frac{14+3^4-3^5}{2}=\frac{14+3^4(1-3)}{2}=\frac{14-2+3^4}{2}=\frac{14-162}{2}=-74$

10 SE PERFECTIONNER

1) $U_n=q^n\times U_0=2^n$

2)a) $V_1=2V_0+U_0=3+1=4$

$V_2=2V_2+U_2=2(2V_1+U_1)+4$

$=4V_1+2U_1+4=16+4+4=24$

b) $V_1-V_0=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$; $V_2-V_1=24-4=20$,

donc $V_1-V_0\neq V_2-V_1$

$\Rightarrow (V_n)_n$ n'est pas une suite arithmétique

$\frac{V_1}{V_0}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$ et $\frac{V_2}{V_1}=\frac{24}{4}=6$

donc $(V_n)_n$ n'est pas une suite géométrique

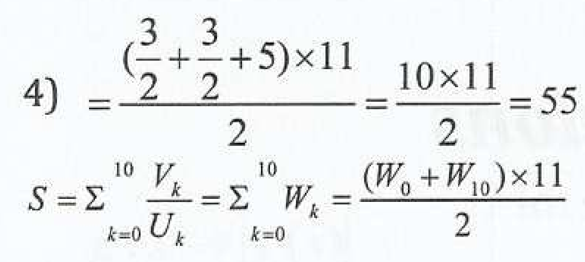
3)a) $W_{n+1}=\frac{V_{n+1}}{U_{n+1}}=\frac{2V_n+U_n}{U_{n+1}}$

or $U_{n+1}=2^{n+1}=2\times 2^n=2\times U_n$

$=\frac{2V_n+U_n}{2U_n}=\frac{V_n}{U_n}+\frac{1}{2}=W_n+\frac{1}{2}$

donc $(W_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{2}$

b) $W_n=W_0+nr=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}n$; $V_n=U_nW_n=2^n(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}n)$



4) $= \dfrac{(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+5)\times 11}{2} = \dfrac{10\times 11}{2} = 55$

$S' = \sum_{k=0}^{10} \dfrac{V_k}{U_k} = \sum_{k=0}^{10} W_k = \dfrac{(W_0+W_{10})\times 11}{2}$



SE PERFECTIONNER

1) calculons U_1 et U_2

$U_1 = 3U_O - 5 = 6 - 5 = 1$ et $U_2 = 3U_1 - 5 = 3 - 5 = -2$ et on vérifier facilement que (U_n), ni une suite arithmétique ni suite géométrique

2) $V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{5}{2} = 3U_n - 5 - \frac{5}{2} = 3U_n - \frac{10}{2} - \frac{5}{2}$

$= 3U_n - \frac{15}{2} = 3(U_n - \frac{5}{2}) = 3V_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de 1[ER] terme

$V_0 = -\frac{1}{2}$ et de raison $q = 3$

3) $V_n = q^n V_0 = -\frac{1}{2} \times 3^n$ et $U_n = -\frac{3^n}{2} + \frac{5}{2}$

4)a) $V_0 + V_1 + \ldots + V_n = aq^{n+1} + b$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3^{n+1}-1}{2} = a3^{n+1} + b$

$\frac{3^{n+1}-1}{4} = a3^{n+1} + b \Rightarrow \frac{1}{4} \times 3^{n+1} - \frac{1}{4} = a3^{n+1} + b$

Donc $a = \frac{1}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$

b)

$S' = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = (V_0 + \frac{5}{2}) + (V_1 + \frac{5}{2}) + \ldots + (V_n + \frac{5}{2})$

$= V_0 + V_1 + \ldots + V_n + (\frac{5}{2} + \ldots + \frac{5}{2})$

$S' = \frac{3^{n+1}-1}{4} + \left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}$

Généralités sur les fonctions

I) Résumé du cours :

A) Parité :

f est paire sur un intervalle I si et seulement si : $\begin{cases} I \text{ est centré en } 0 \\ \forall x \in I : f(-x) = f(x) \end{cases}$

C_f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

f est impaire sur un intervalle I si et seulement si : $\begin{cases} I \text{ est centré en } 0 \\ \forall x \in I : f(-x) = -f(x) \end{cases}$

C_f est alors symétrique par rapport à l'origine du repère

B) Opération sur les fonctions

	courbe	Variation
$g : x \to f(x) + b$	ς_g s'obtient à partir de ς_f par translation de vecteur : $b\vec{j}$	f et g ont même sens de variation sur I
$g : x \to f(x+a)$ $I = IR$	ς_g s'obtient à partir de ς_f par translation de vecteur : $-a\vec{i}$	f et g ont même sens de variation sur I
Bilan $g := f(x+a) + b$		La courbe de ς_g est l'image de la courbe ς_f par la translation de vecteur $\vec{v} : -a\vec{i} + b\vec{j}$
$g : x \to k \times f(x)$ $g : x \to k \in IR \setminus \{0\}$	ς_g s'obtient à partir de ς_f par : -contraction vertical si $0 < k < 1$ - étirement vertical si $k > 1$	-Si $k > 0$, f et kf ont même sens de variation sur I - si $k < 0$, f et kf ont des sens variation contraire sur I
Cas particulier ou $k = 1$ $g : x \to -f(x)$	ς_g s'obtient à partir de ς_f par symétrie par rapport à l'axe (ox)	f et $(-f)$ ont des sens de variation contraires sur I

$g : x \to \lvert f(x) \rvert$	ς_g coïncide avec de ς_f lorsque $f(x) \geq 0$ et si $f(x) \leq 0$, ς_g est la symétrie de ς_f par rapport à (ox)	
$g : x \to f(-x)$	La courbe ς_g est l'image de la courbe ς_f par symétrie orthogonal d'axe (oy)	

f Définie un intervalle I , a un réel et on se place dans $R(o,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan

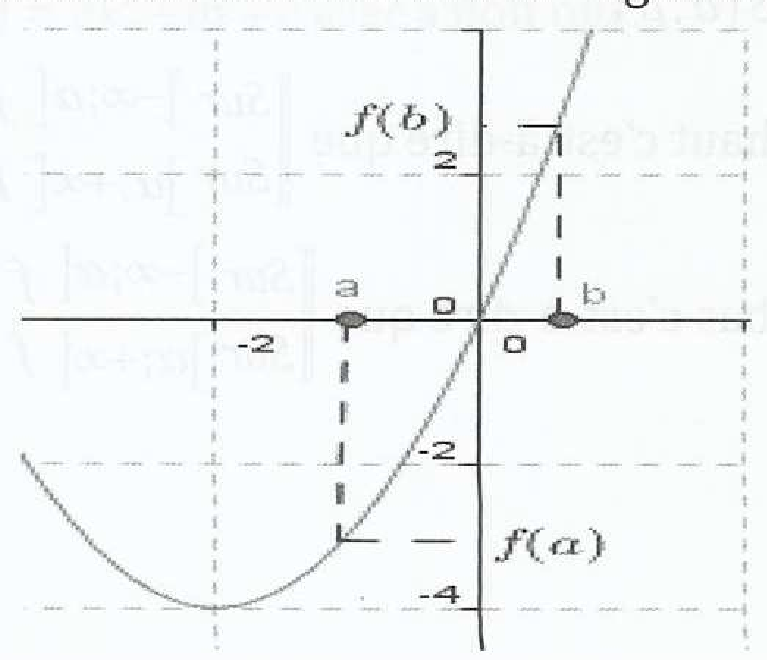
Remarque :

Si f et g sont définis sur I, Que dire de (f+g)	- Si f et g sont croissantes, (f+g) l'est aussi - Si f et g sont décroissantes, (f+g) l'est aussi sinon on ne sait pas
On ne peut rien dire en général sur le produit f.g (ni sur le quotient $\frac{f}{g}$) (contre-exemple : $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$)	

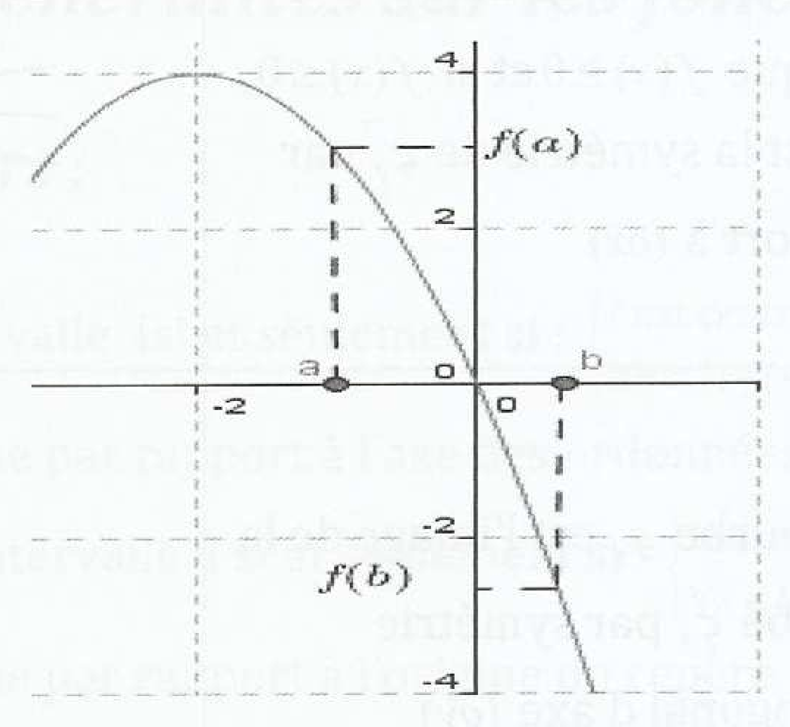
C) Sens de variation d'une fonction :

Soit f une fonction défini sur un intervalle I.

- Dire que f est strictement croissante sur I signifie f conserve l'ordre c'est-à-dire que pour tous réels a et b de I : a<b signifie f(a)<f(b).



- Dire que f est strictement décroissante sur I signifie que f inverse l'ordre, c'est-à-dire que pour tous réels a et b de I : a < b signifie f(a) > f(b).



<u>*Application*</u> : Encadrement d'une fonction avec les variations :

Soit a et b deux réels tels que a < b.

- Une fonction strictement croissante conserve l'ordre donc : si $a \le x \le b$ alors $f(a) \le f(x) \le f(b)$
- Une fonction strictement décroissante conserve l'ordre donc : si $a \le x \le b$ alors $f(a) \ge f(x) \ge f(b)$

D) Fonction polynôme de degré deux :

La fonction polynôme de degré deux est la forme : $f(x)=ax^2+bx+c$, ou a, b et c sont des réels, $a \neq 0$. Cette expression de f est la forme développée de f

<u>*Propriété :*</u>

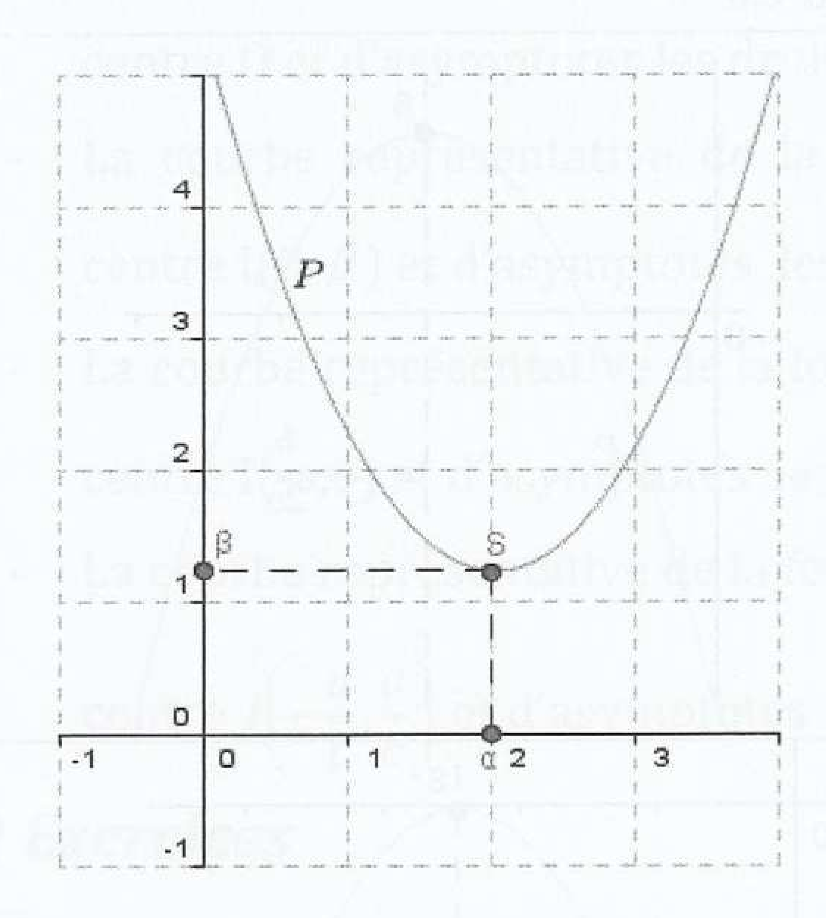
Soit $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a \neq 0$. Il existe a et b deux réels tels que $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

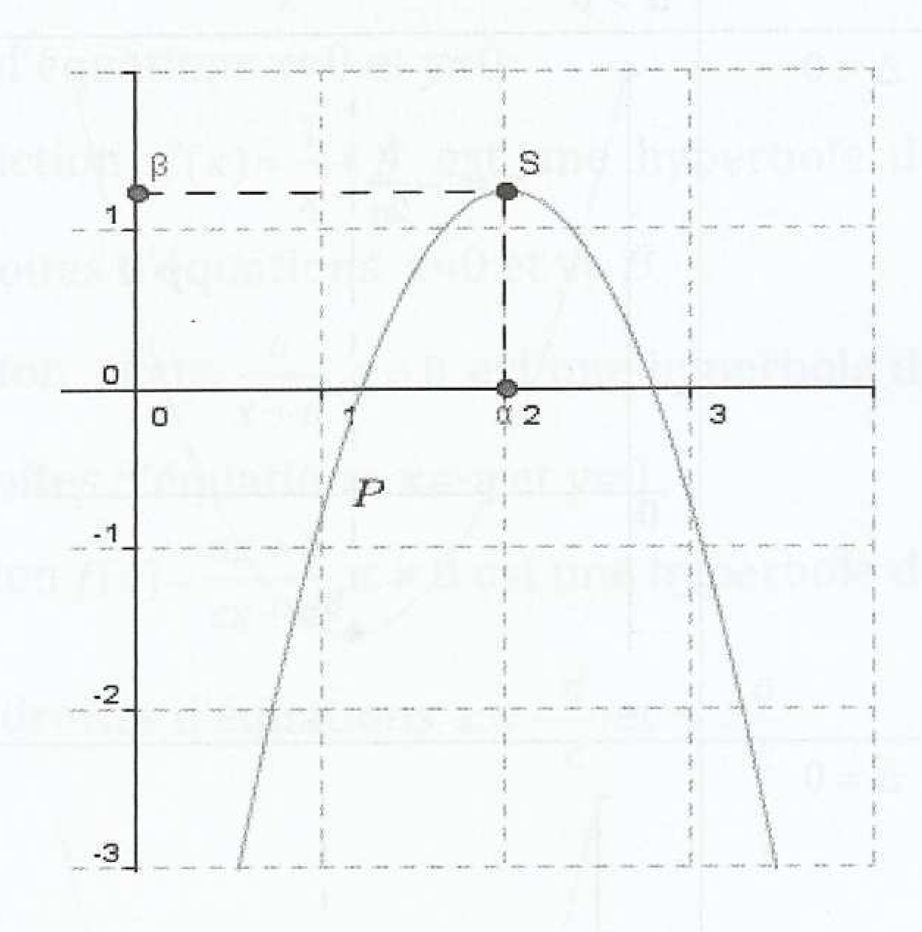
avec $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$

Cette expression est la forme canonique de f. La représentation graphique de f est une parabole (P) de sommet $S(\alpha,\beta)$

Si a>0, (P) est orienté vers le haut c'est-à-dire que $\begin{Vmatrix} Sur\ ]-\infty;\alpha[\ f \text{ est décroissante} \\ Sur\ ]\alpha;+\infty[\ f \text{ est croissante} \end{Vmatrix}$

Si a<0, (P) est orienté vers le bas c'est-à-dire que $\begin{Vmatrix} Sur\ ]-\infty;\alpha[\ f \text{ est croissante} \\ Sur\ ]\alpha;+\infty[\ f \text{ est décroissante} \end{Vmatrix}$

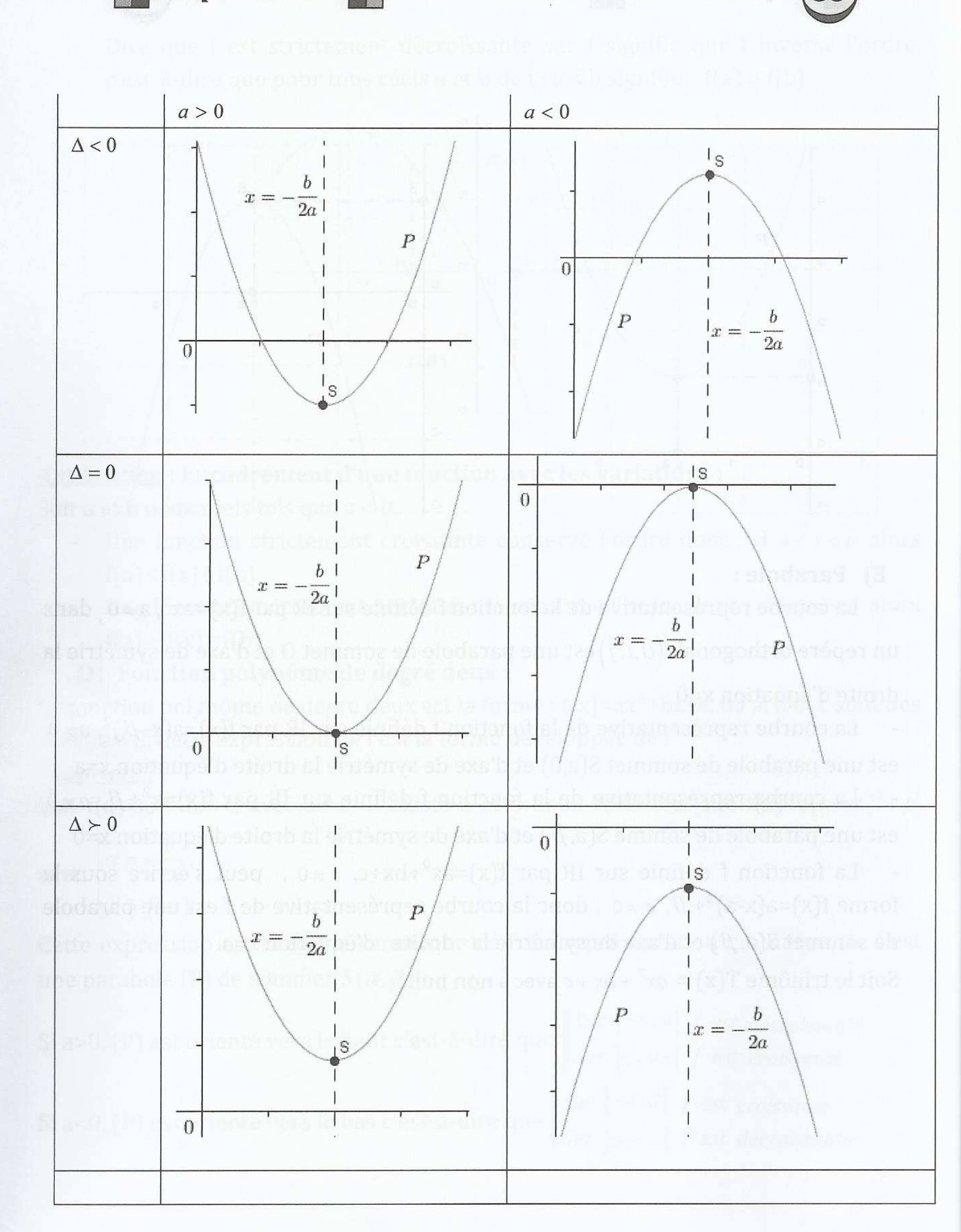




E) Parabole :

- La courbe représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x)=ax^2$, $a\neq 0$, dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ est une parabole de sommet O et d'axe de symétrie la droite d'équation x=0
- La courbe représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x)=a(x-\beta)^2$, $a\neq 0$ est une parabole de sommet S(a,0) et d'axe de symétrie la droite d'équation x=a
- La courbe représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x)=x^2+\beta$, $a\neq 0$ est une parabole de somme $S(a,\beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation x=0
- La fonction f définie sur IR par $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, peut s'écrire sous la forme $f(x)=a(x-a)^2+\beta$, $a\neq 0$, donc la courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(a,\beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation x=a.

Soit le trinôme $T(x) = ax^2+bx+c$ avec a non nul.

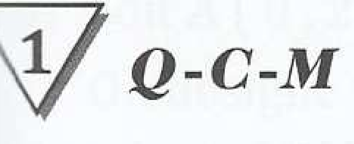


$a > 0$
$a < 0$
$\Delta < 0$
$x = -\frac{b}{2a}$
P
0
S
S
0
P
$x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta = 0$
$x = -\frac{b}{2a}$
P
0
S
S
0
$x = -\frac{b}{2a}$
P
$\Delta \succ 0$
$x = -\frac{b}{2a}$
P
S
0
0
S
P
P
$x = -\frac{b}{2a}$

F) Hyperbole :

- La courbe représentative de la fonction $f(x)=\frac{a}{x}, a\neq 0$ est une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites d'équations x=0 et y=0
- La courbe représentative de la fonction $f(x)=\frac{1}{x}+\beta$ est une hyperbole de centre $I(0,\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations x=0 et y=β
- La courbe représentative de la fonction $f(x)=\frac{a}{x+a}, a\neq 0$ est une hyperbole de centre I(-a,0) et d'asymptotes les droites d'équations x=-a et y=0
- La courbe représentative de la fonction $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, c≠ 0 est une hyperbole de centre $I\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

II) Exercices



Q-C-M

1) Soit $f(x)=2(x-\frac{1}{2})^2$

- La représentation de f est une parabole de sommet $(\frac{1}{2},0)$
- $\Delta : y=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie
- $f(3)=12,5$

2) Soit $g(x)=-3x^2+2x-1$

- $g(x)=-3(x-\frac{1}{3})^2-\frac{2}{3}$
- La représentation de g est une parabole de sommet $S(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$
- $\Delta : x=\frac{1}{3}$ est un axe de symétrie

3) Soit $h(x)=\frac{ax+b}{x-1}$

- $D_h = IR\setminus\{-1\}$
- Pour a = 2 et b = -1 les points $E(2,3)$ et $F(-2,\frac{5}{3})$ appartient à la courbe de h

4) Soit K une fonction telle que : $3K(-x)+K(x)=4x^3+2x$

- K est une fonction paire
- K est une fonction impaire

5) Soit $T(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$ et $F(x)=\frac{1}{2}x^2$

- $\zeta_F=t_{2\vec{j}}(\zeta_1)$ avec $\zeta_1=S_{(ox)}(\zeta_T)$
- $\zeta_F=t_{2\vec{j}}(\zeta_T)$
- $\zeta_F=t_{2\vec{i}}(\zeta_1)$ avec $\zeta_1=S_{(ox)}(\zeta_T)$



APPLIQUER

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit les fonctions :

$f: IR \to IR$, $x \mapsto x^2+x-1$ et $g: IR \to IR$, $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$

1) Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont deux paraboles dont on précisera leurs axes et leurs sommets.
2) Tracer dans le même repère $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$
3)



APPLIQUER

Soit P la parabole d'équation $y=2x^2$

1) Tracer P.
2) Résoudre graphiquement les inéquations :

a) $2x^2 \prec 2$ b) $2x^2 \geq 8$ c) $2x^2 \leq -1$ d) $2 \leq 2x^2 \leq 8$



APPLIQUER

Dans chacun des cas suivants, déterminer le sommet et l'axe de la parabole P puis la construire

a) $P: y=x^2-2x$ b) $P: y=\frac{1}{2}x^2+2x$ c) $P: y=-x^2+x+3$



5 S'ENTRAINER

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

1. Etudier f et tracer sa courbe représentative ζ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
2. a) Construire sur le même graphique la droite D d'équation $y=\frac{1}{2}x+3$

   b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de ζ et la droite D.

   c) Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation : $x^2-x\geq 6$
3. On donne $g(x)=\inf\left(\frac{1}{2}x^2,\frac{1}{2}x+3\right)$

   Construire dans le même repère et avec une autre couleur la courbe représentative de g.
4. Soit A (0 , 2) et M un point de ζ d'abscisse α appartenant à [0 , 2].

   On désigne par H le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées et K le point tel que MHAK soit un rectangle.

   a) Calculer le périmètre du rectangle en fonction de α.

   b) Pour quelle valeur de α le périmètre est maximal.

6 S'ENTRAINER

On considère la fonction $f:IR\to IR\ ;\ x\ \mapsto\ \frac{1}{2}x^2$

1. Tracer ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
2. Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+2$.

   a) Vérifier que pour tout $x\in IR$, $g(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2$.

   b) Tracer ζ_g à partir de ζ_f dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
3. Soit h la fonction définie sur IR par : $h:x\mapsto\frac{1}{2}x^2-2|x|+2$.

   a) Montrer que h est une fonction paire.

   b) Tracer ζ_h à partir de ζ_g.

   c) Déduire le tableau de variation de h.

4. Déterminer, graphiquement, l'ensemble des réels m, pour les quels l'équation $h(x)=m$ admet quatre solutions.

7 S'ENTRAINER

1) On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2$.

Tracer ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$.
   a) Vérifier que pour tout réel x, on a : $g(x)=f(x)-2$.
   b) Tracer alors ζ_g, à partir de ζ_f, dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.
   c) Calculer les coordonnées des points A et B intersection de ζ_g avec l'axe des abscisses.
   d) Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'inéquation : $f(x)>2$.
3) Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x)=|g(x)|$.
   a) Tracer ζ_h, à partir de ζ_g.
   b) Déduire le tableau de variation de h.
   c) Déterminer, graphiquement, l'ensemble des réels m, pour les quels l'équation $|g(x)|=m$ admette deux solutions.

4) On désigne par S le sommet de ζ_g et par S' celui de ζ_h. Quelle est la nature du quadrilatère SAS'B.



S'ENTRAINER

R = $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ étant un repère orthonormé du plan.

Soit f la fonction définie par : $f(x)=1+\frac{2}{x-3}$.

1) Etudier f et construire sa courbe représentative H dans le repère R.
2) Soit I(3 , 1) et le repère R' = $\left(I,\vec{i},\vec{j}\right)$, Ecrire une équation de H dans R'.

3) Résoudre graphiquement $\left|\frac{x-1}{x-3}\right| \geq x-1$.

4) Soit g la fonction définie par $g(x)=1+\frac{2}{|x|-3}$.

a) Déterminer le domaine de définition de g.

b) Montrer que g est paire. Déduire de H la courbe représentative de g.

c) Dresser à partir de sa courbe, le tableau de variation de g.

5) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :
$(m-1)|x| = 3m-1$, m $\in$ IR.



9 SEPERFECTIONNER

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :f(x)=x^2 et g(x)= x^3 . On notera (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f)et (C_g)

2) a) Tracer un repère orthogonal$(O;\vec{i},\vec{j})$, ainsi que la droite (D) d'équation y=x+3.

b) Déterminer graphiquement les valeurs approchés des abscisses des points d'intersection de (C_f)et (D)

c) Développer $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$

d) Etablir alors les valeurs exactes des points d'intersection de (C_f) et (D)

3) A est un point de (C_g) d'abscisse I et B est un point de (C_g)d'abscisse 2.

a) Déterminer les coordonnées des points A et B.

b) Déterminer une équation de la droite (AB)

4) On va montrer que la droite (AB) coupe (C_g) en un troisième point C dont on veut déterminer les coordonnées.

a) montrer que pour trouver les coordonnées de C on est amené à résoudre l'équation : (x+3)(x-2)(x-1)=0

b) Déterminer alors les coordonnées de C.



SEPERFECTIONNER

Soit f une fonction définie pour tout réel par :$f(x)=ax^2+bx+c$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer les coefficients réels a,b et c tels que (C_f) passe par le point A(2 ;10), coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -3 et coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -6

2) On considère la fonction g définie pour tout x réel par :$g(x)=2x^2+4x-6$

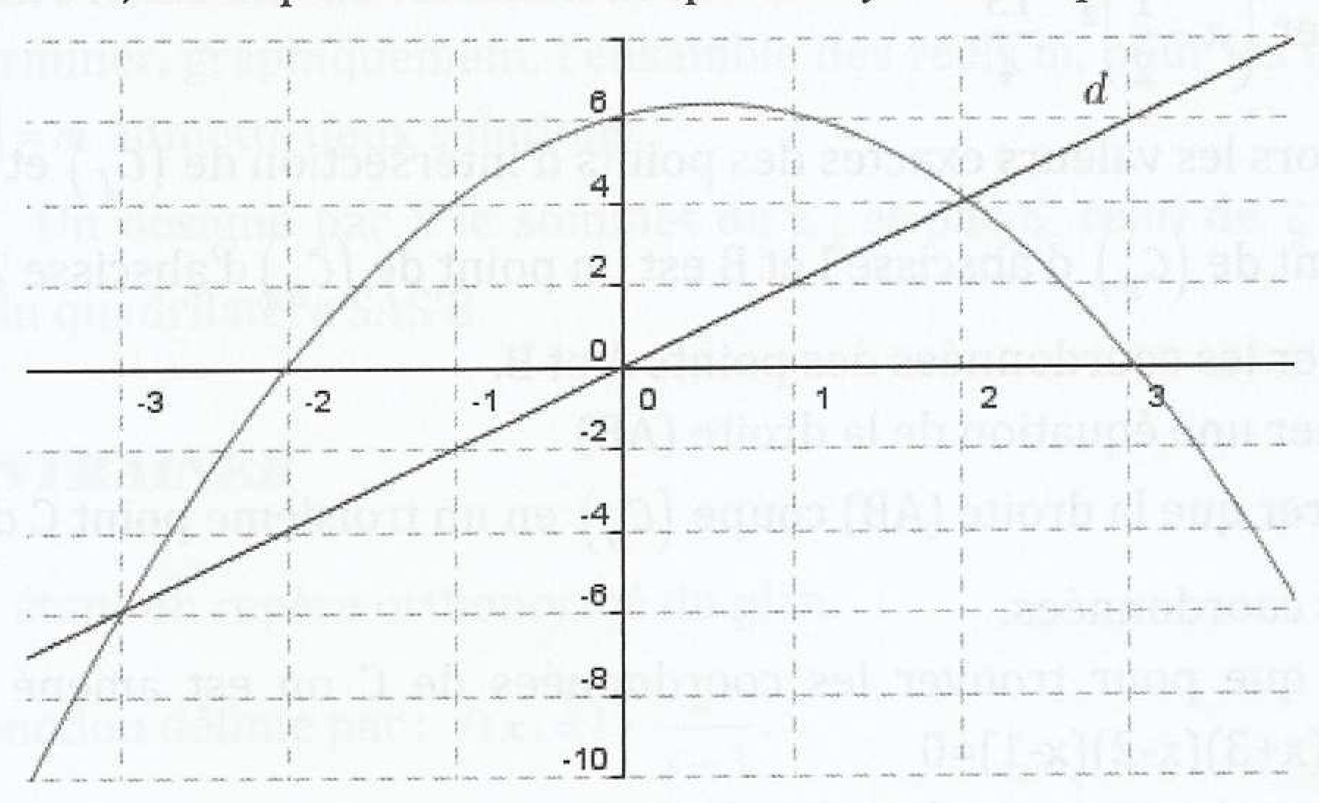
On désigne par (C_g) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$;

Soit (D) la droite d'équation y=3x-3. Déterminez le(s) point(s) d'intersection de (D) de (C_g)



SEPERFECTIONNER

Dans le repère ci-dessous, on considère la parabole représentant la fonction : $x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c$, ainsi que la droite d d'équation $y = m\,x + p$



On définit la fonction f par : $f(x) = \dfrac{mx+p}{ax^2+bx+c}$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Résoudre graphiquement l'équation f(x) =1.



SEPERFECTIONNER

Le plan est rapporté à un repère orthonormé R=$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit la fonction f définie sur IR/$\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

1) Montrer que pour tout $x\in IR/\{1\}: f(x)=2+\dfrac{1}{x-1}$

2) Etudier les variations de f.

3) Tracer $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f.

4) Soit A(1,2) et R'=$\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$. Ecrire l'équation de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère R'.

5) On désigne par A,B et C trois points de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisses respectives a, b et c a, b, c $\in$IR/$\{1\}$

On note H l'orthocentre du triangle ABC.

a) Déterminer en fonction de a, b et c les équations des hauteurs (AH) et (BH)

b) En déduire que H $\in(\mathscr{C}_f)$

6) Soit (D_m), m$\in$IR, la droite d'équation : y=x+m.

a) Déterminer l'ensemble Γ des réels m tels que (D_m) coupe $(\mathscr{C}_f)$ en deux points distincts M_1 et M_2

b) Soit $m\in\Gamma$. On pose : $I_m=M_1*M_2$. Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie sur Γ

7) Soit la fonction h définie sur $IR/\{1,-1\}$ par h(x)=$\dfrac{1}{|x|-1}$

a) Expliquer comment tracer $(\mathscr{C}_h)$ à partie de $(\mathscr{C}_f)$

b) Donner les variations de h graphiquement.

8) Soit la fonction g définie sur R/$\{2\}$ par g(x)=$\dfrac{x-1}{x-2}$.On note par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère IR. Etablir que : $(\mathscr{C}_f)=S_{(D_0)}\left((\mathbf{c}_f)\right)$.



SEPERFECTIONNER

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=x^2-x+2$

1) Etudier f et tracer Cf dans un repère orthonormé R$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

2) soit Cg :y $=x^2+1$ et $\Delta: y=x-1$

a) Tracer Cg et Δ dans un autre repère orthonormé

b) Soit M(x,y) un point quelconque de Cg ,calculer d(M, Δ) en fonction de x.

c) En déduire les cordonnées de point M de Cg le plus proche de Δ .



14

SEPERFECTIONNER

Le plan est un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit $A(1,0)$; $B(-1,0)$

1) Déterminer l'ensemble $\Gamma = \{M(x,y) \text{ tel que } MA^2 + MB^2 = 4\}$

2) Soit la fonction $f : IR \longrightarrow IR$

$x \longrightarrow \sqrt{1-x^2}$

a) Etudier la parité de f.

b) Montrer que $\Gamma = Cf \cup S_{(o,\vec{i})}(Cf)$.

c) Tracer alors Cf

3) $h : IR \longrightarrow IR$

$x \longrightarrow \dfrac{1}{2x}$

a) Déterminer l'intersection de Ch et Cf

b) Etudier h et tracer Ch

c) Résoudre graphiquement $2\sqrt{1-x^2} < \dfrac{1}{2x}$



Q-C-M

1) vrai – faux – vrai 2) vrai – faux – vrai 3) faux – vrai 4) faux – vrai 5) vrai – faux – faux

2 APPLIQUER

1) On a : $f(x) = x^2 + x - 1$

$$= \left(x^2 + 2\times\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Soit $\mathcal{C}_1$ la courbe de la fonction $x \to \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

$\mathcal{C}_1$ est une parabole de sommet $S_1\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et d'axe $\Delta_1 : x = -\frac{1}{2}$. $\mathcal{C}_f = t_{-\frac{5}{4}\vec{j}}(\mathcal{C}_1)$

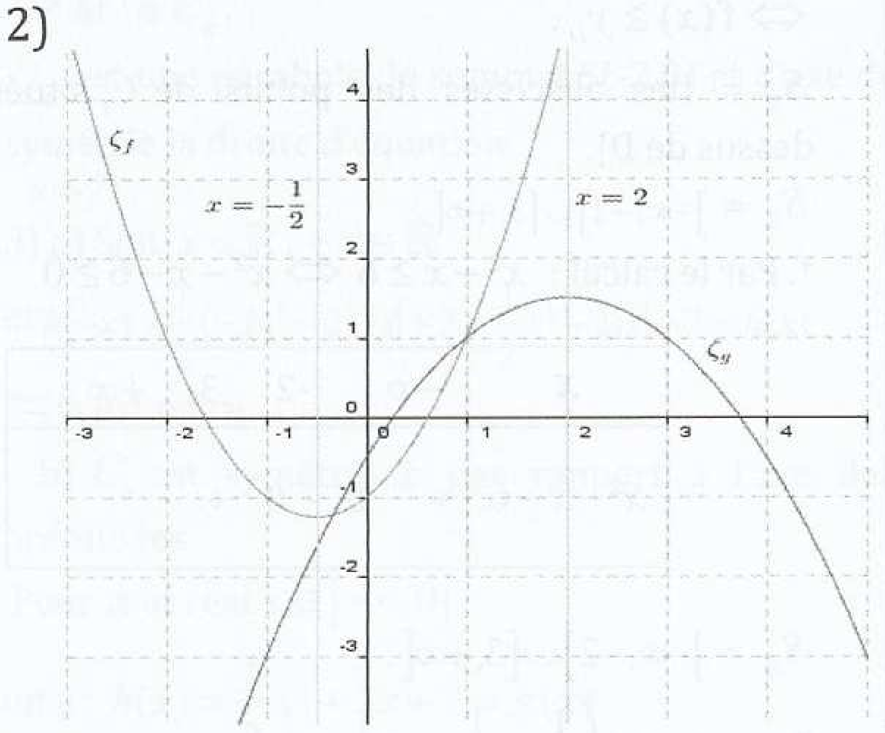
Donc $\mathcal{C}_f$ est une parabole de sommet $S\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ et d'axe $\Delta_1 : x = -\frac{1}{2}$

De même on a : $g(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x) - \frac{1}{2}$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2\times 2x + 4 - 4) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{3}{2}$$

$\mathcal{C}_g = t_{\frac{3}{2}\vec{j}}(\mathcal{C}_2)$ et $\mathcal{C}_2$ est la parabole de sommet $S_2(2,0)$ et d'axe $\Delta_2 : x = 2$. Donc $\mathcal{C}_g$ est une parabole de sommet $S'\left(2, \frac{3}{2}\right)$ et d'axe $\Delta_2 : x = -2$

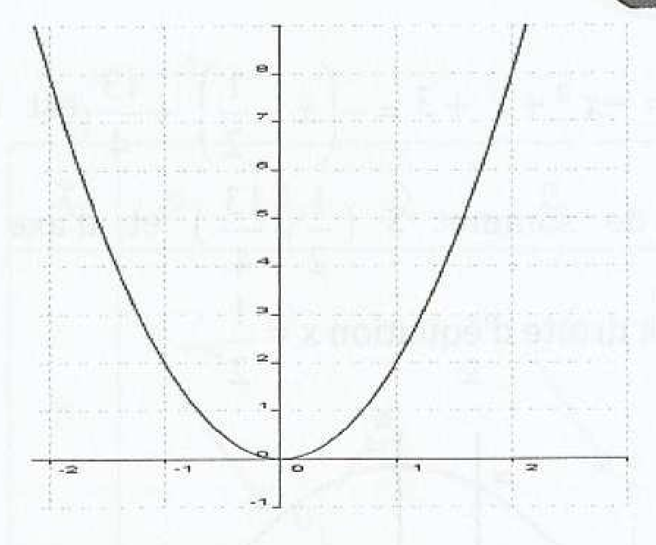
2)





APPLIQUER

1) Voir figure



2) Graphiquement :

a) $2x^2 < 2$ c'est l'intervalle $]-1, 1[$

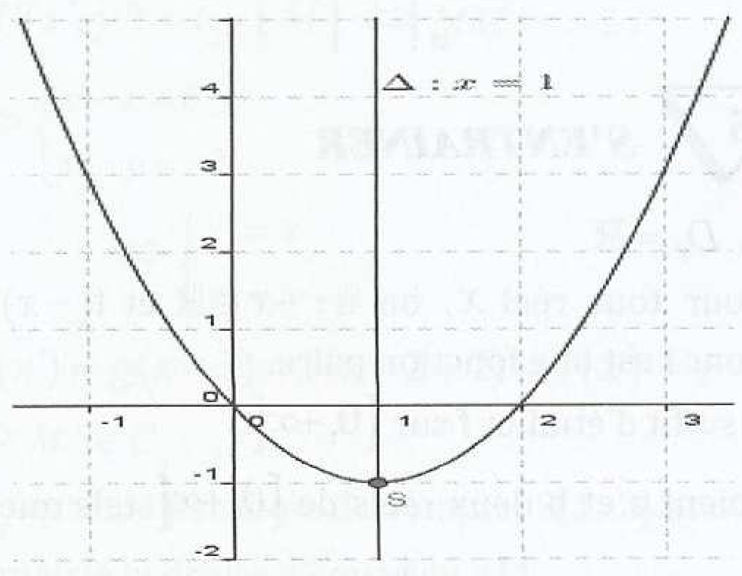
b) $2x^2 \geq 8$ c'est $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

c) $2x^2 \leq -1$ c'est l'ensemble vide

d) $2 \leq 2x^2 \leq 8$ c'est $[-2, -1] \cup [1, 2]$

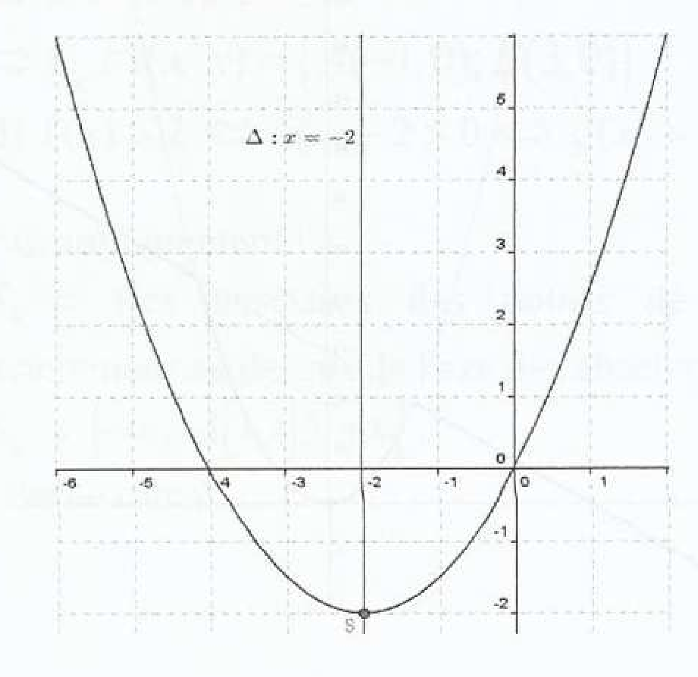


APPLIQUER

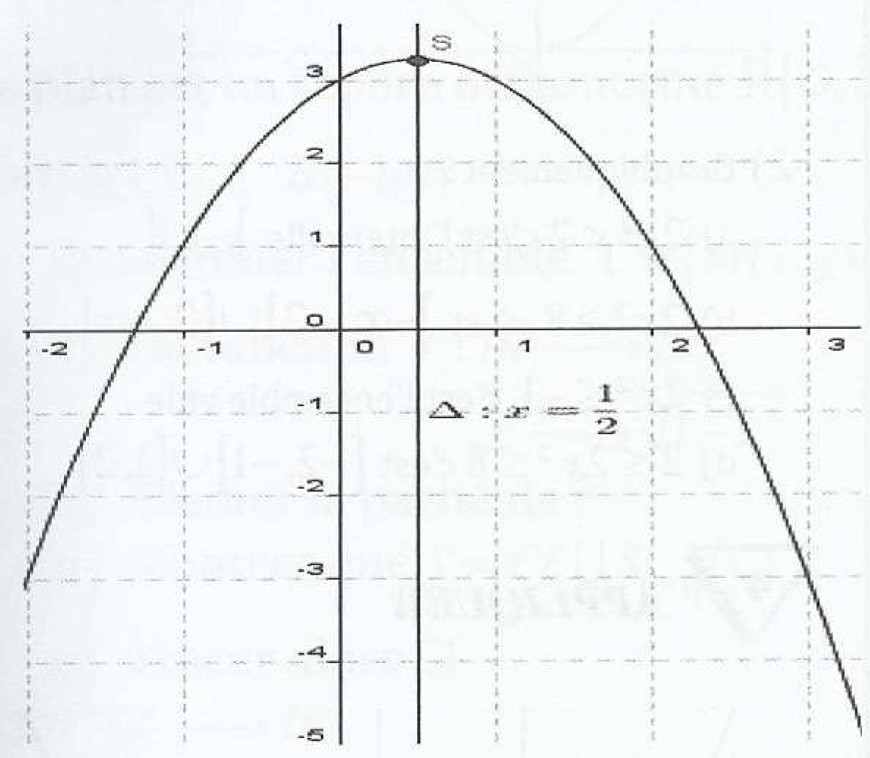


a) $P : y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ est une parabole de sommet S (1, -1) et d'axe de symétrie la droite d'équation x = 1.

b) $P : y = \frac{1}{2}x^2 + 2x = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$ est une parabole de sommet S (-2, -2) et d'axe de symétrie la droite d'équation x = -2.



c) $P : y = -x^2 + x + 3 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$ est une parabole de sommet S $(\frac{1}{2}, \frac{13}{4})$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$



5 S'ENTRAINER

1. $D_f = \mathbb{R}$

Pour tout réel x, on a : $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = f(x)$ donc f est une fonction paire.

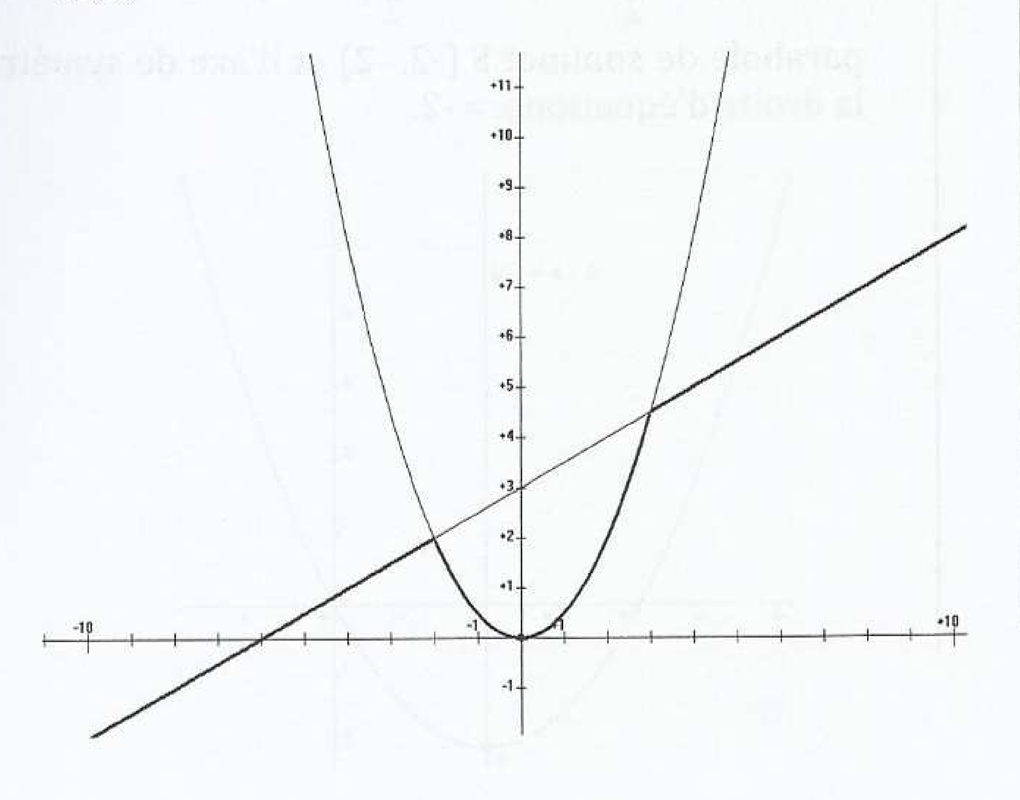
Il suffit d'étudier f sur $[0, +\infty[$.

Soient a et b deux réels de $[0, +\infty[$ tels que : a < b

$\Rightarrow a^2 < b^2 \Rightarrow \frac{1}{2}a^2 < \frac{1}{2}b^2 \Rightarrow f(a) < f(b)$

Ainsi f est croissante sur $[0, +\infty[$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



x	0	$+\infty$
f	0 ↗	$+\infty$

1) a) Pour tracer D il suffit de prendre le tableau de valeurs suivants :

x	0	-6
y	3	0

b) $M(x, y) \in C_f \cap D$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$

$\Leftrightarrow x^2 = x + 6$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = 25 \Rightarrow x = \frac{1-5}{2} = -2$ ou $x = \frac{1+5}{2} = 3$.

Ainsi, $C_f \cap D = \{A(-2, 2) ; B(3, \frac{9}{2})\}$.

c) $x^2 - x \geq 6$.

* Résolution graphique :

$x^2 - x \geq 6 \Leftrightarrow x^2 \geq x + 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 \geq \frac{1}{2}x + 3$

$\Leftrightarrow f(x) \geq y_D$.

$S_{\mathbb{R}}$ = {les abscisses des points de C_f situés au dessus de D}.

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$.

*. Par le calcul : $x^2 - x \geq 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \geq 0$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x^2 - x - 6$		+	0	-	0	+	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$.

3. $g(x) = \inf\left(\frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}x + 3\right)$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+3 & si\ x\in]-\infty,-2]\cup[3,+\infty[\\ \frac{1}{2}x^2 & si\ x\in[-2,3]\end{cases}$$

4. a) Soit P le périmètre du rectangle MHAK

$\Rightarrow$ P = 2 (MH + AH)

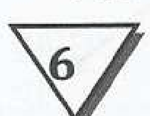
$= 2\left(\alpha+2-\frac{1}{2}\alpha^2\right)=-\alpha^2+2\alpha+4.$

b) Soit M la valeur maximale de P $\Rightarrow P\leq M$

$\Rightarrow -\alpha^2+2\alpha+4\leq M$ pour tout réel $\alpha\in[0,2]$.

$\Rightarrow -\alpha^2+2\alpha+4-M\leq 0$ pour tout réel $\alpha\in[0,2]$.

$\Rightarrow \Delta'=1+4-M=0 \Rightarrow$ M = 5 et $\alpha=1$.



6 S'ENTRAINER

2\. a) $\frac{1}{2}(x+2)^2=\frac{1}{2}(x^2+4x+4)=\frac{1}{2}x^2+2x+2$

b) $g(x)=f(x+2)\Rightarrow C_g=t_{-2\vec{i}}(C_f)$

En effet soit $M(x,y)\in C_f$

et $M'(x',y')=t_{-2\vec{i}}(M)\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=-2\vec{i}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x'-x=-2\\ y'-y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x'=x-2\\ y'=y\end{cases}$

$g(x')=g(x-2)=f(x-2+2)=f(x)=y=y'$

$\Rightarrow M'\in C_g$.

C_g est une parabole de sommet S(-2,0) et d'axe de symétrie la droite d'équation x=-2.

3) a) Soit $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$

et $h(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2-2|-x|+2=\frac{1}{2}x^2-2|x|+2=h(x)$

$\Rightarrow$h est paire.

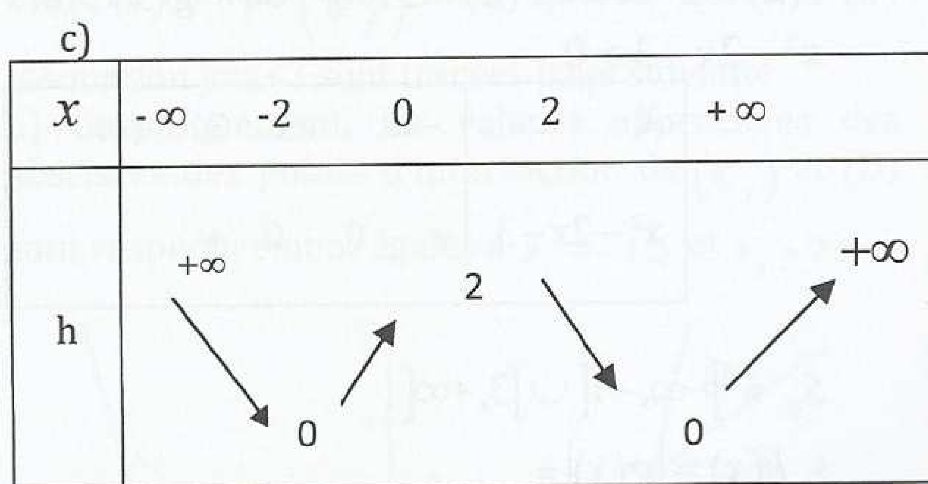
b) C_h est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Pour tout réel $x\in]-\infty,0]$,

on a : $h(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+2=g(x)$

$\Rightarrow C_h=C_g$ sur $]-\infty,0]$ sur $[0,+\infty[$, on complète par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

c)



4) L'équation h(x) = m admet quatre solutions lorsqu'une droite horizontale coupe C_h en 4 points, c'est-à-dire lorsque $m\in]0,2[$.

7 S'ENTRAINER

2\. b) $g(x)=f(x)-2\Rightarrow C_g=t_{-2\vec{j}}(C_f)$.

En effet soit $M(x,y)\in C_f$ et

$M'(x',y')=t_{-2\vec{j}}(M)\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=-2\vec{j}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x'-x=0\\ y'-y=-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x'=x\\ y'=y-2\end{cases}$

$g(x')=g(x-2)=f(x-2+2)=f(x)=y=y'$

$\Rightarrow M'\in C_g$.

C_g est une parabole de sommet S(1,-2) et d'axe de symétrie la droite d'équation x=1.

c) $M(x,y)\in C_g\cap(x'x)\Leftrightarrow\begin{cases}y=g(x)\\ y=0\end{cases}$

$\Rightarrow g(x)=0\Rightarrow \frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}=0$

$\Rightarrow x^2-2x-3=0$

$\Rightarrow x=-1$ ou $x=3$

$\Rightarrow C_g\cap(x'x)=\{A(-1,0);B(3,0)\}$

d) $f(x)>2\Leftrightarrow f(x)-2>0\Leftrightarrow g(x)>0$

* Graphiquement :

$S_{\mathbb{R}}$ = {les abscisses des points de C_g situés strictement au dessus de l'axe des abscisses}

$S_{\mathbb{R}}=]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$.

* Par le calcul :

$f(x)>2 \iff f(x)-2>0 \iff g(x)>0 \iff x^2-2x-3>0$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$.

4. $h(x)=|g(x)| = \begin{cases} g(x) & si\ x\in]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[\\ -g(x) & si\ x\in[-1,3] \end{cases}$

$C_h = C_g$ sur $]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$ et $C_h = S_{(x'x)}(C_g)$ sur [-1,3].

b)

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
H	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

c) L'équation h(x) = m admet deux solutions lorsqu'une droite horizontale d'équation y = m coupe C_h en deux points. C'est-à-dire lorsque $m\in]0,2[$.

4. S(1,-2) ; S'(1,2) ; A(-1,0) et B(3,0)

SA $=\sqrt{(-1-1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ = AS' = S'B= BS $\Rightarrow$SAS'B est un losange.

8 S'ENTRAINER

$f(x)=1+\dfrac{2}{x-3}$.

1. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$

* Variations de f sur $]-\infty,3[$:

Soient a et b deux réels de $]-\infty,3[$ tels que :

$a<b \iff a-3<b-3<0 \iff \dfrac{1}{a-3}>\dfrac{1}{b-3}$

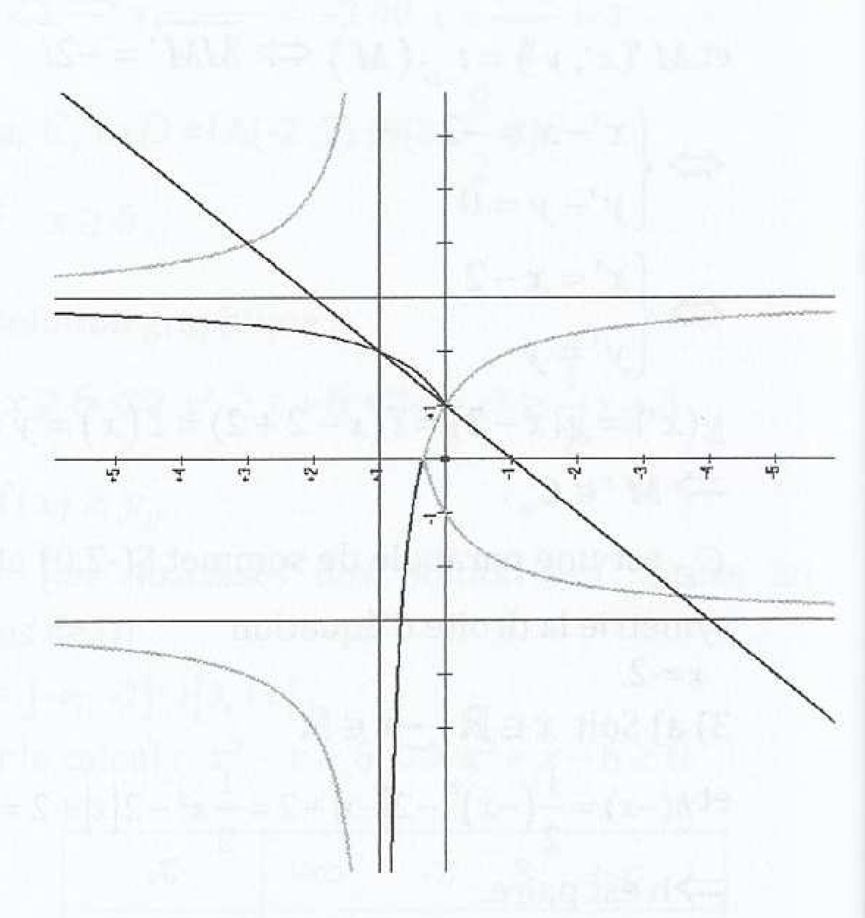
$\iff \dfrac{2}{a-3}>\dfrac{2}{b-3} \iff 1+\dfrac{2}{a-3}>2+\dfrac{2}{b-3} \iff$ $f(a)>f(b)$.

Ainsi f est décroissante sur $]-\infty,3[$.

*.Il en est de même pour les variations de f sur $]3,+\infty[$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

* Traçage de C_f :



2. Soit I(3,1). $M(X,Y)_{(I,\vec{i},\vec{j})}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$ or $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$

$H : y=1+\dfrac{2}{x-3}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

$\Rightarrow H : Y = \dfrac{2}{X}$ dans le repère $\left(I,\vec{i},\vec{j}\right)$.

H est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites $\left(I,\vec{i}\right): y=1$ et $\left(I,\vec{j}\right): x=3$ et pour centre de symétrie le point I.

3. $|f(x)| \geq x-1$; $S_{\mathbb{R}} =]-\infty,1] \cup [2,3[$.

4. a) $g(x) = f(|x|)$. $x \in D_g \Leftrightarrow |x|-3 \neq 0$

$\Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq 3$ et $x \neq -3 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$, $-x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$

et $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$ donc g est paire

c)

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
g	1 ↗ $+\infty$	- ↗ $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ ↘ $-\infty$	$+$ ↘ 1	

5. $(m-1)|x| = 3m-1 \Leftrightarrow \dfrac{|x|-1}{|x|-3} = m \Leftrightarrow g(x) = m$

m	$-\infty$ $\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
Nombre de solutions de l'équation $g(x)=m$	2	0	2

9 SE PERFECTIONNER

Les abscisses des points d'intersection de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et $\left(\mathscr{C}_g\right)$ sont solutions de l'équation f(x)=g(x).

Or pour tout réel x, f(x)=g(x)

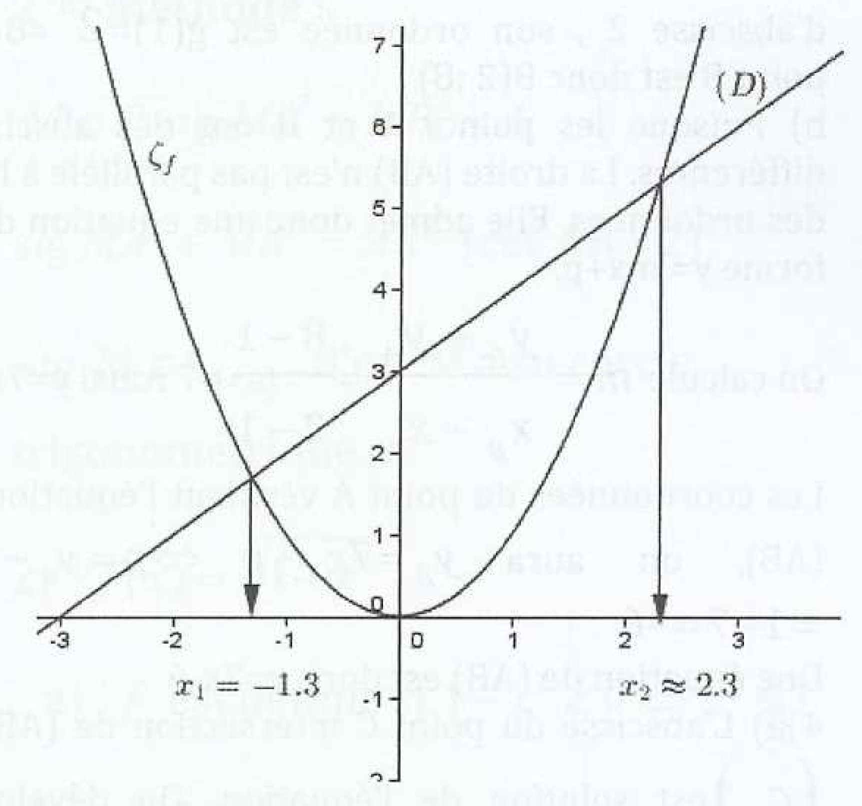
$\Leftrightarrow x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(1-x) = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 = 0$

ou 1-x $\Leftrightarrow x = 0$ ou x=1

Les points d'intersection de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et $\left(\mathscr{C}_g\right)$ sont donc $M(0; f(0)=g(0)=0)$ et $N(1; f(1)=g(1)=1)$

2)a) la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ ainsi que la droite (D) d'équation y=x+3 sont tracées page suivante

b) Graphiquement, les valeurs approchées des abscisses des points d'intersection de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et (D) sont respectivement égales à $x_1 \approx -1.3$ et $x_2 = 2.3$



c) pour tout réel x,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = x^2 - 2\times x\times\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{13}{4} = x^2 - x - \frac{12}{4} = x^2 - x - 3$$

d) les abscisses des points d'intersection de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et (D) sont solutions de l'équation f(x)=x+3. Or, pour tout réel x.

f(x)=x+3 $\Leftrightarrow x^2 = x+3 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0$

d'après la règle du produit nul, on aura donc

$x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

ou $x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

Les points d'intersection de $\left(c_f\right)$ et (D) ont donc pour abscisse $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ et $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

3)a) Puisque A est un point de $\left(c_g\right)$ d'abscisse 1, son ordonnée est $g\left(1\right)=1^3=1$ le point A est donc A(1 ;1). Puisque B est un point de $\left(c_g\right)$ d'abscisse 2 , son ordonnée est g(1)= 2^3 =8. Le point B est donc B(2 ;8)

b) Puisque les points A et B ont des abscisses différentes. La droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle admet donc une équation de la forme y= mx+p.

On calcule $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{8-1}{2-1}$ =7 Ainsi y=7x+p

Les coordonnées du point A vérifiant l'équation de (AB), on aura $y_A=7x_A+p \iff p=y_A-7x_A$ $=1-7=-6$

Une équation de (AB) est donc y=7x-6

4)a) L'abscisse du point C intersection de (AB) et $\left(c_g\right)$ est solution de l'équation. On développe pour tout réel x :(x+3)(x-2)(x-1)

=(x^2-2x+3x-6)(x-1)

=(x^2+x-6)(x-1)= $x^3-x^2+x^2-x-6x+6$

$=x^3-7x+6$

Ainsi l'équation $x^3-7x+6=0$ est équivalent à l'équation (x+3)(x-2)(x-1)

b) d'après la règle du produit nul, on aura (x+3)(x-2)(x-1)=0 si et seulement si x+3=0 $\iff x=-3$ ou x-2=0 $\iff$x=2 ou x-1=0 $\iff$x=1

les deux dernières solutions de cette équation sont les abscisses des points M et N déjà connus.

Le troisième point d'intersection C a donc pour abscisse 3 et pour ordonnée

g(-3)= $\left(-3\right)^3$ =-27 . Le point C est donc C(-3 ; -27)

10 SE PERFECTIONNER

1) si C_f passe par le point A(2 ;10) alors f(2)=10 $\iff$ 4a+2b+c=10. Si C_f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -3, alors f(-3)=0 $\iff$ 4a+2b+c=10. Si C_f coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -6, alors f(0)=-6 $\iff$c=-6. Nous devons donc résoudre le système

$$\begin{cases}4a+2b+c=10\\9a-3b+c=0\\c=-6\end{cases}\iff\begin{cases}4a+2b-16=0\\9a-3b-6=0\\c=-6\end{cases}$$

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\iff\begin{cases}12a+6b-48=0\\18a-6b-12=0\\c=-6\end{cases}$$

$$\begin{matrix}3L_1\\2L_2\\L_3\end{matrix}\iff\begin{cases}30a-60=0\\18a-6b-12=0\\c=-6\end{cases}$$

$$\begin{matrix}3L_1+2L_2\\2L_2\\L_3\end{matrix}\iff\begin{cases}a=2\\18\times2-6b-12=0\\c=-6\end{cases}\iff\begin{cases}a=2\\b=4\\c=-6\end{cases}$$

On obtient ainsi f(x)=$2x^2$+4x-6

Les abscisses des points d'intersection de C_g et de (D) sont solutions se l'équation $2x^2$+4x-6=3x-3 $\iff$ $2x^2$+x-3=0. Le calcul du discriminant donne $\Delta=1^2-4\times2\times(-3)=25=5^2$

L'équation admet donc deux solutions réelles distinctes $x_1=\dfrac{-1-2\sqrt{25}}{2\times2}=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{25}}{2\times2}=1$

Les points d'intersection de C_g et de (D) sont donc $A\left(-\dfrac{3}{2};g\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{15}{2}\right)$ et B(1 ;g(1)=0)

11 SE PERFECTIONNER

1) f est définie si et seulement si ax^2+bx+c $\neq 0$, or ax^2+bx+c=0 pour les abscisses des points d'intersection de la parabole C et de l'axe des abscisses. On lit sur le graphique que ax^2+bx+c=0 pour x=-2 ou x=3. Ainsi $D_f=IR/\left\{-2;3\right\}=\left]-\infty;-2\right]\cup\left]-2;3\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

2) f(x)=1 $\iff$ ax^2+bx+c=mx+p. Les solutions de l'équation f(x)=1 sont donc les abscisses des points d'intersection de C et d. S= $\left\{-3;2\right\}$



13 SE PERFECTIONNER

1) Soit

$$f(x)=x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

Cf est une parabole de sommet $S\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$

d'axe $x=\frac{1}{2}$

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$h(x)$	$\frac{7}{4}$	2	4	8

2) a/ $g(x)=x^2+1$

Cg est une parabole de sommet $S'(0,1)$

d'axe $(O,\vec{j})$

x	0	1	2
y	1	2	5

$\Delta : y = x-1$

x	0	2
y	-1	1

b) Soit M(x , y) $\in Cg$, or

$$d=(M,\Delta)=\frac{|x-y-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}$$

On a : M(x , y) $\in Cg \Leftrightarrow y=x^2+1$.

D'où

$$d(M,\Delta)=\frac{x-(x^2+1)-1}{\sqrt{2}}=\frac{|-x^2+x-2|}{\sqrt{2}}=\frac{f(x)}{\sqrt{2}}$$

$d(M,\Delta)$ est minimal si $f(x)$ est minimale

, d'où $x=\frac{1}{2}$ or $M\in Cg \Rightarrow y=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

Conclusion : M$\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{5}{4}\right)$



SE PERFECTIONNER

1/ On pose $M(x,y)$

$M\in\Gamma \Leftrightarrow MA^2+MB^2=4$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=4$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2=4$

$sig\ x^2+y^2=1$

C'est l'équation du cercle trigonométrique

<u>Conclusion</u> : $\Gamma = C_{(0,1)}$

2 ème méthode :

$M\in\Gamma$ sig $MA^2+MB^2=4$

sig $MA^2+MB^2=AB^2$ (car AB = 2)

sig $M\in C_{[AB]}$, d'où $M\in$ au cercle trigonométrique

2/ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

a) f est définie si $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 1$

$Df=[-1,1]$

* On a : $x\in Df$ sig $-1\leq x\leq 1$

sig $-1\leq -x\leq 1$

sig $-x\in Df$

$f(-x)=\sqrt{1-(-x^2)}=\sqrt{1-x^2}=f(x)$.

D'où f est paire

b) $\sqrt{\ } = Cf \cup S_{(o,\vec{i})}Cf$

$M(x,y)\in\sqrt{\ } \Leftrightarrow x^2+y^2=1$

$\Leftrightarrow y^2=1-x^2$ et $x\in[-1,1]$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{1-x^2}$ ou $y=-\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$

$\Leftrightarrow y=f(x)$ ou $y=-f(x)$

$\Leftrightarrow M\in Cf$ ou $M\in s_{(o,\vec{i})}(Cf)$

Conclusion : $\sqrt{\ } = Cf\cup S_{(o,\vec{i})}(Cf)$

c) On a Cf la partie de $\sqrt{\ }$ située au dessus de l'axe des abscisses

3/ $h(x)=\frac{1}{2x}$

a) $Cf \cap Ch$?

$M(x,y) \in Cf \cap Ch \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{1-x^2} \\ y=\frac{1}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2x}$

C.E $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0,1]$

*** Si** $x \in]0,1]$

$\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2x} \Leftrightarrow 1-x^2=\frac{1}{4x^2} \Leftrightarrow 4x^2-4x^4=1$

$\Leftrightarrow 4x^4-4x^2+1=0$

On pose $x^2=X$

$\Leftrightarrow 4X^2-4X+1=0$

$\Leftrightarrow (2X-1)^2=0$

$\Leftrightarrow 2X-1=0 \Leftrightarrow X=\frac{1}{2}$ d'où $x^2=\frac{1}{2}$

d'où $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (impossible car $x \in]0,1]$)

* Si $x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\frac{1}{2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Conclusion : $Cf \cap Ch=\left\{M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

b) $h(x)=\frac{1}{2x}$ $D_h=\mathbb{R}^*$

x	0	0,5	1	1,5	2
$h(x)$		1	0,5	0,33	0,25

C_h est une hyperbole de centre O d'asymptote les droites $(O,\vec{i})$, $(O,\vec{j})$

$2\sqrt{1-x^2}<\frac{1}{2x} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}<\frac{1}{2x}$

$\Leftrightarrow f(x)<h(x)$ $S_{IR}=]0,1]\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

Statistiques

I) Résumé du cours :

La statistique est une science d'observation qui, en classant des données, décrit des phénomènes au moyen d'un certain nombre de valeurs numériques.

A. Langage statistique :

Une étude statistique à une variable s'effectue sur une population composée d'individus sur lesquels on observe un caractère.

1) Population :

Tout ensemble étudié par la statistique est une population ses éléments sont appelés des individus.

Exemple :

Une étude statistique porte sur les élèves d'un lycée. La population est alors constituée par l'ensemble des élèves du lycée et les individus sont les élèves.

2) Caractère :

Un critère retenu pour analyser une population s'appelle un caractère.

S'il prend des valeurs numériques on dit que le caractère est quantitatif. Sinon on dit que le caractère est qualitatif.

Exemples :

- Le caractère « couleur des yeux de l'élève » est un **caractère qualitatif non quantifiable)**. Les modalités de ce caractère sont les couleurs des yeux : vert, noir, marron, bleu ...
- Le caractère « mois de naissance de l'élève » est un **caractère qualitatif ordonné** (car non quantifiable, mais ordonnable : les mois s'ordonnent). Les modalités de ce caractère sont les mois de l'année : janvier, février...
- Le caractère « nombre de frères et sœurs de l'élève » est un caractère quantitatif discret : quantitatif car le caractère se traduit à l'aide d'un nombre exprimant une quantité et discret car le caractère non prend que des valeurs entières de caractère.
- Le caractère « taille de l'élève » est un caractère quantitatif continu : quantitatif car le caractère se traduit à l'aide d'un nombre exprimant une quantité et continu car ce nombre peut prendre toute valeur comprise entre certaines limites.



En résumé :

- caractère qualitatif
- caractère quantitatif → discret / Continu

3) Classe :

On peut répartir les valeurs d'un caractère quantitatif en classes, c'est-à-dire en intervalles :

Exemple :

Les notes obtenues par tous les candidats aux épreuves de baccalauréat. Les valeurs extrêmes des intervalles peuvent être comprises ou exclues. Il faut que chacune des valeurs du caractère appartienne à une classe et une seule.

4) Effectifs, fréquences, pourcentages :

- **L'effectif** n_i d'une classe est le nombre d'individus qu'elle contient.

Exemple : dire que la valeur 15 a poureffectif 10 signifie qu'il y a 10 observations pour la valeur du caractère 15.

- **La fréquence** f d'une classe est le rapport de son effectif n_i à l'effectif total N de la population étudiée : $f = \frac{n_i}{N}$
- **Le pourcentage** p d'une classe s'obtient en multipliant sa fréquence f par 100 : $p = \frac{n}{N} \times 100$

5) Effectifs cumulés :

Lorsque l'on étudie un caractère quantitatif :

- On appelle effectif cumulé croissant de la valeur x le nombre d'individus ayant des valeurs du caractère inférieures ou égales à x.
- On appelle effectif cumulé décroissant de la valeur x le nombre d'individus ayant des valeurs du caractère supérieur ou égale à x.

6) Fréquences cumulés :

Les même notions et les mêmes calculs sont applicables à la série des fréquences.

La fréquence cumulée correspondant à une modalité est la somme de la fréquence correspondant à cette modalité et des fréquences correspondantes à toutes les valeurs précédentes.



B. Représentation graphique :

1) Diagramme à barres :

Pour les modalités quantitatives, on peut utiliser un système d'axe.

> Dans le graphique cartésien, on porte :
> - En abscisse, les valeurs du caractère.
> - En ordonnée, les effectifs correspondants ou les fréquences correspondantes.

La ligne polygonale obtenue en joignant les points représentatifs par des segments de droites s'appelle le polygone des effectifs (ou des fréquences).

Un diagramme à barres est une représentation de données statistiques à l'aide de rectangles de largeur constante.

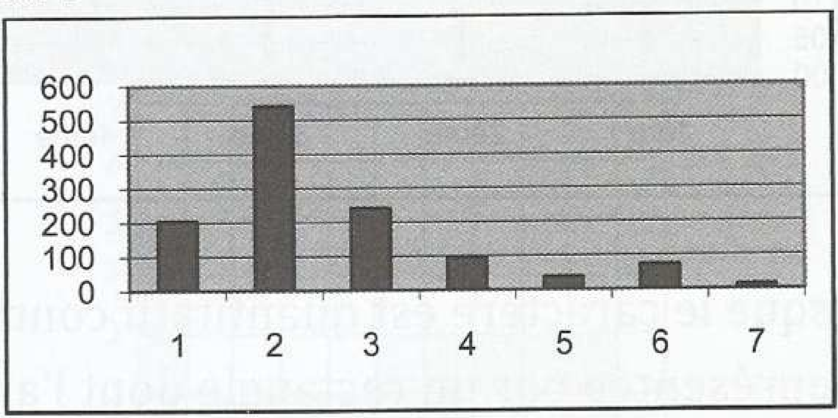
Exemple 1 :

*** Caractère quantitatif :**

Une enquête est faite sur le nombre d'enfants de 1200 familles ayant au moins un enfant scolarisé dans un lycée. Les résultats sont les suivants :

Nombre d'enfants par famille	1	2	3	4	5	6	7
Effectifs	204	540	240	96	36	72	12

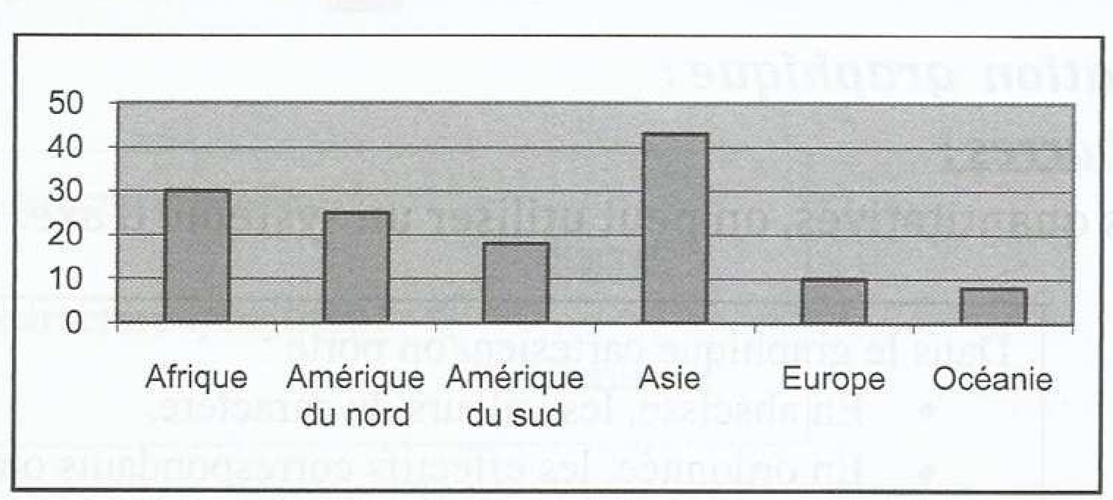
Représentation graphique :



Exemple 2 :

*** Caractère qualitatif :**

le schéma ci-dessous est un diagramme à barres représentant la superficie en million de kilomètres carrés des blocs continentaux.



2) Diagramme en bâtons :

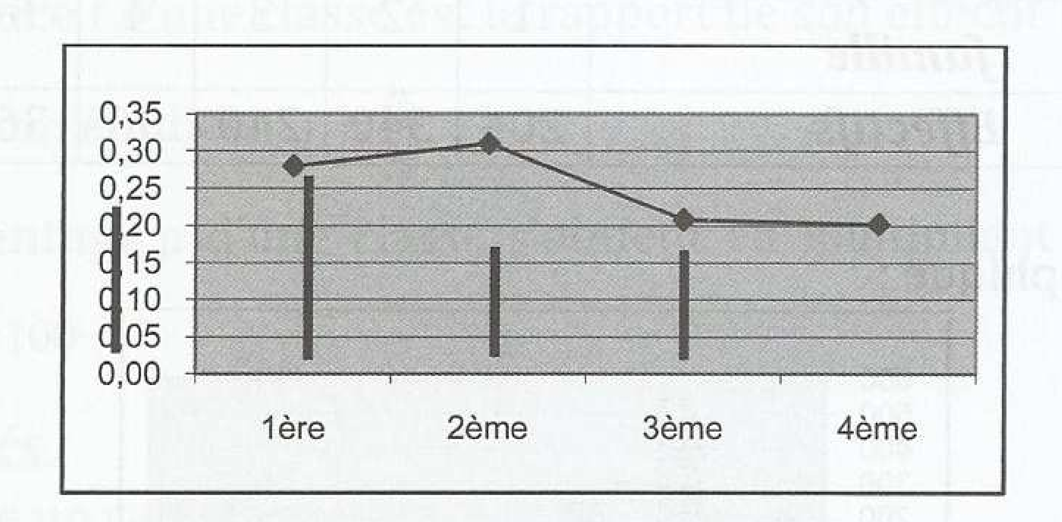
Lorsque le caractère est discret, une représentation peut être un diagramme en bâton qui représente les données statistiques à l'aide de segments.

3) Polygone des fréquences :

Un polygone de fréquence est obtenu en joignant par des segments de droites les extrémités des bâtons.

Exemple : Répartition des élèves d'un lycée en fonction de la classe qu'ils fréquentent :

Modalités	1ère	2ème	3ème	4ème	Total
Fréquences	$\frac{140}{500}=0,28$	$\frac{155}{500}=0,31$	$\frac{104}{500}=0,208$	$\frac{101}{500}=0,202$	1



4) Histogramme :

On utilise ce procédé lorsque le caractère est quantitatif continu :

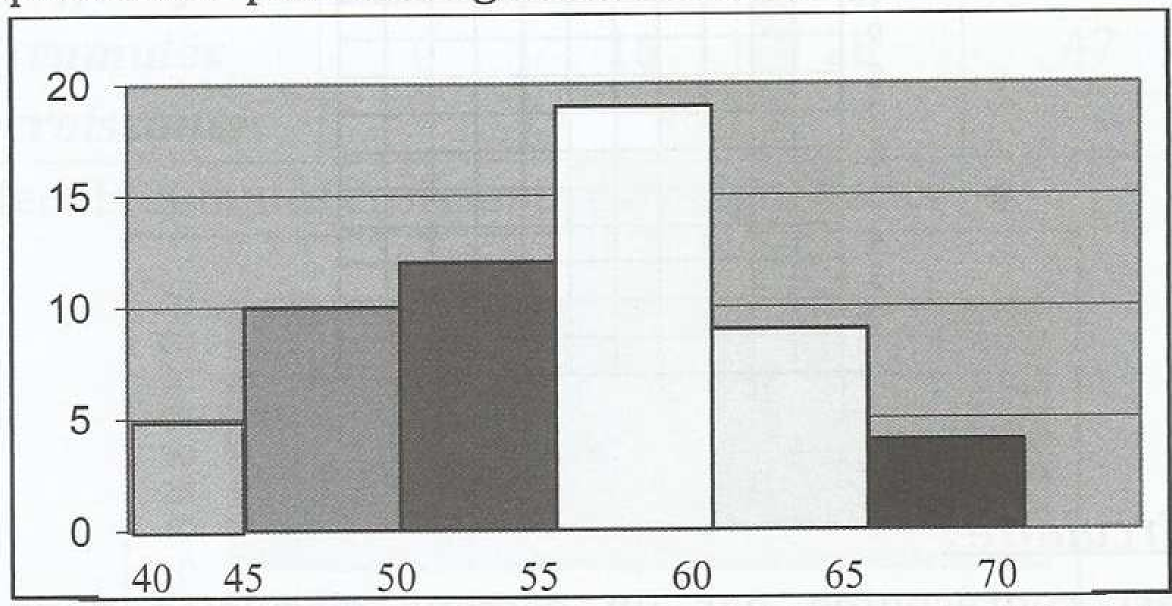
- Chaque classe est représentée par un rectangle dont l'aire est proportionnelle à l'effectif.
- Un des côtés des rectangles appartient à un axe, et ses côtés sont proportionnels aux amplitudes des classes.
- Si les classes d'égale amplitude, la hauteur de chaque rectangle est donc proportionnelle à l'effectif.

Exemple :

Au cours d'une visite médicale, on a pesé 60 personnes. Les résultats, exprimés en kilogramme, sont donnés dans le tableau suivant :

Poids	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	[60;65[	[65;70[
Nombre des personnes	6	10	12	19	9	4

Cette série est représentée par l'histogramme suivant :



Si les classes sont d'amplitudes différentes une légère modification s'impose pour conserver la proportionnalité de l'aire sous l'histogramme à l'effectif.

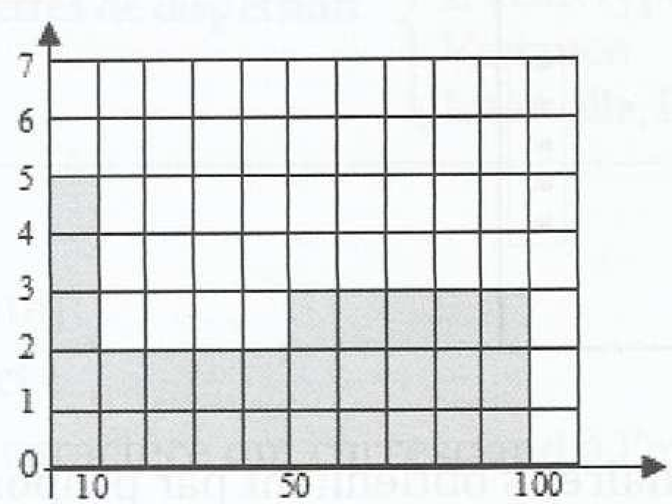
Lorsqu'on représente des donnés statistiques par un histogramme, ce qui est significatif n'est pas la hauteur des rectangles mais leurs aires.

Exemple 1 :

Répartition de l'argent de poche (en D) par mois des élèves d'une classe :

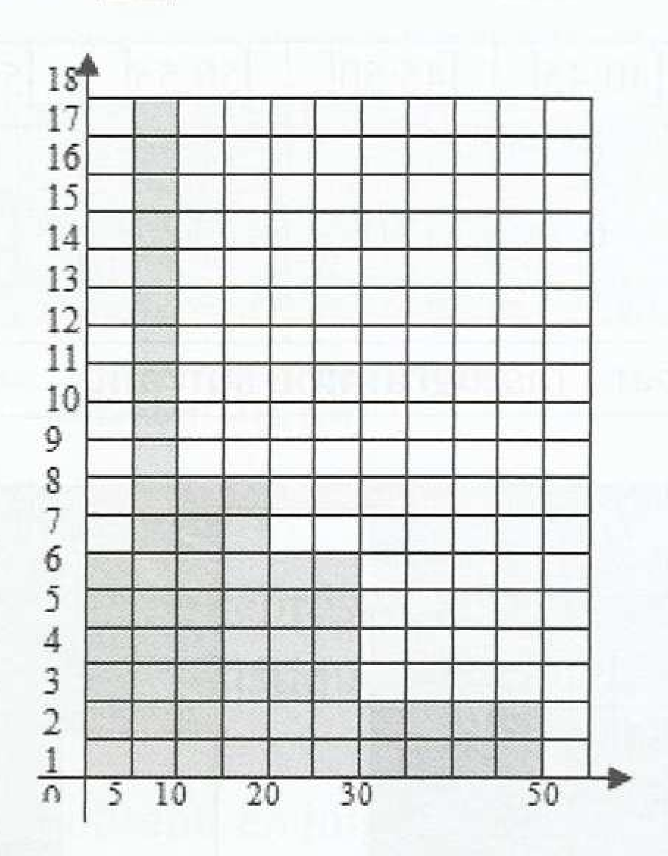
Classe	[0;10[	[10;15[	[50;100[
Effectifs	5	8	15

L'histogramme correspondant :



Exemple 2 : Unité de longueur L = 5

Classes	[0;5[	[5;10[	[10;20[	[20;30[	[30;50[
Effectifs	6	18	16	12	12
Hauteur des rectangles de l'histogramme	6	18	$\frac{16}{2}=8$	$\frac{12}{2}=6$	$\frac{12}{4}=3$

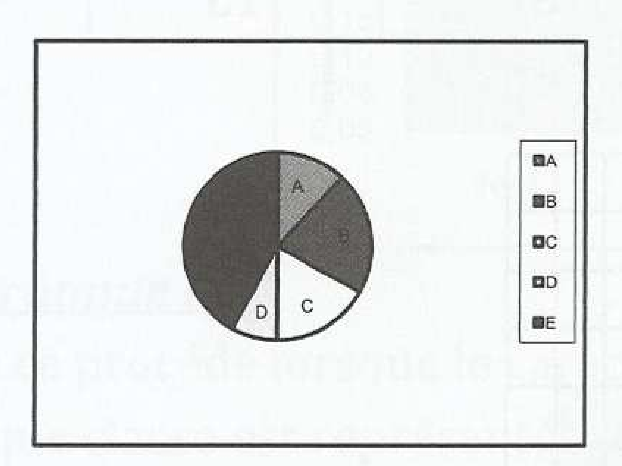


5) Diagramme circulaire :

Chaque classe est représentée par un secteur circulaire dont la surface est proportionnelle à l'effectif. Il en est donc de même l'angle au centre.

Exemple :

Modalités	A	B	C	D	E	Total
Effectifs	12	21	17	8	42	100
Pourcentage	12 %	21 %	17 %	8 %	42 %	100 %
Angles	43.2°	75.6°	61.2°	28.8°	151.2°	360°



Les angles des secteurs angulaires s'obtiennent par proportionnalité.
L'effectif de la population étant 100, A occupe 12% du disque.
Par conséquent, l'angle de secteur angulaire représentent A occupera 12% de 360° c'est-à-dire 43,2°° etc….

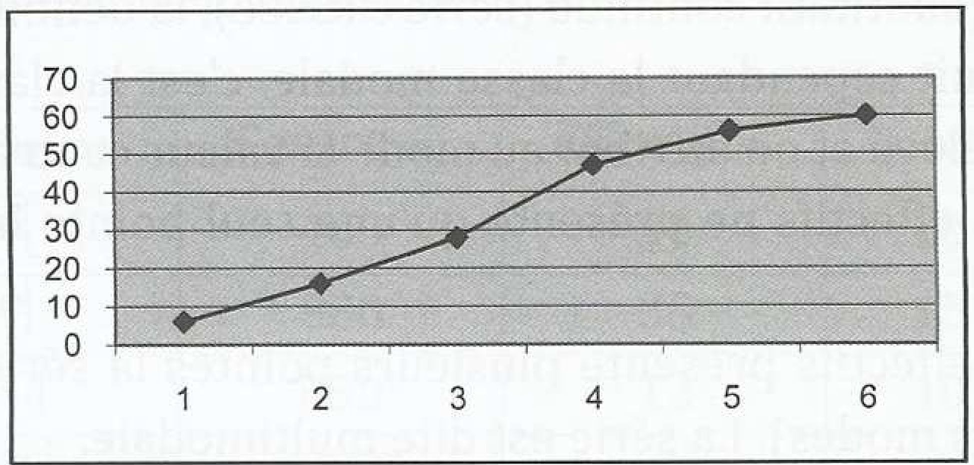
6) Polygone des effectifs cumulés croissants :

Graphiquement, on obtient un ensemble de points que l'on relie par des segments de droites. On trace ainsi le polygone des effectifs cumulés croissants (ou décroissant).

Exemple :

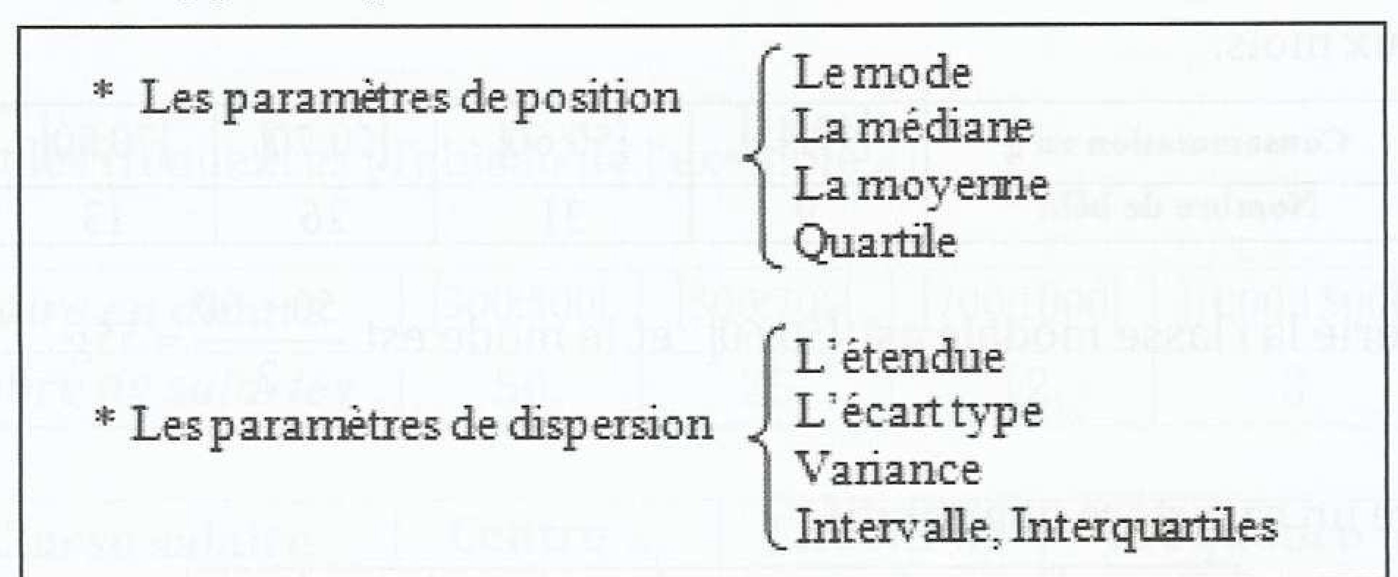
Classes	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	[60;65[	[65;70[
Effectifs	6	10	12	19	9	4
Effectifs cumulés croissants	6	16	28	47	56	60

Polygone des effectifs cumulés croissants correspondants :



C. **Paramètres d'un caractère statistique :**

On distingue deux types de paramètres sur un caractère statistique.



Paramètre de position :

Mode : (ou valeur dominante)

* **Pour un caractère direct :**

Le mode est une valeur du caractère qui correspond à l'effectif le plus grand.

Exemple 1 :

Nombre de frères et sœurs d'un groupe de 100 élèves :

Nombre de frères et soeurs	0	1	2	3	4	5	6
Nombre d'élèves	23	36	17	14	4	4	2

Dans cette série « Nombre de frères et sœurs », le mode est 1.



*** Pour un caractère qualitatif :**

Exemple 2 :

Le tableau suivant donne la répartition des mariages dans une salle de fête durant 2004 :

Mois	Jan	Fév	Mars	Avr	Mai	Jui	Juil	Août	Sept	Oct	Nov	Déc
Nombre de mariages	0	3	3	10	7	20	36	19	12	4	1	2

Le mode de cette série est juillet.

* Pour un caractère quantitatif continue (série classée), la définition précédente n'est plus valable. On définit cependant la classe modale, c'est la classe dont l'effectif est relativement le plus élevé et on attribut au mode la valeur centrale de cette classe.

* Si le polygone des effectifs ne présente qu'une seul pointe la série est dite : uni-modale.

* Si le polygone des effectifs présente plusieurs pointes la série a plusieurs classes modales (ou plusieurs modes). La série est dite multimodale.

Exemple :

Dans un crèche on a suivi la consommation journalière de lit en poudre chez les bébés de deux mois.

Consommation en g	$[40;45[$	$[50;60[$	$[60;70[$	$[70;80[$
Nombre de bébé	9	31	26	13

Pour cette série la classe modale est $[50;60[$ et le mode est $\frac{50+60}{2} = 55g$.

Moyenne :

On considère un caractère quantitatif :

Valeur du caractère ou centre de l'intervalle	x_1	x_2	.....	x_p
Effectifs	n_1	n_2	.....	n_p

La moyenne arithmétique est alors le réel $\overline{x}$ définie par :

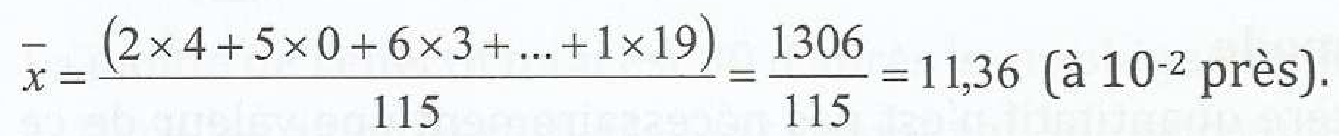
$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{N}$ où $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ (N est donc l'effectif total).

Exemple 1 :

On a soumis un échantillon de 115 personnes à un test de 20 questions où il fallait répondre par vrai ou faux.

On a obtenu le tableau suivant :

Nombre de réponses correctes	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Effectifs	2	0	3	5	7	11	14	18	16	15	10	7	3	1	2	1



$$\overline{x} = \frac{(2\times4+5\times0+6\times3+...+1\times19)}{115} = \frac{1306}{115} = 11{,}36 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près).}$$

Il y a en moyenne 11 ,36 (à 10^{-2} près) réponses correctes.

Exemple 2 :

Dans une entreprise, la répartition des salaires est la suivante :

Salaire en dinars	[300;500[	[500;700[	[700;1000[	[1000;1500[
Nombre de salariés	50	25	12	3

Pour calculer le salaire moyen, on dresse d'abord un tableau donnant les centres de classes.

Classe salaire	Centre x_i	Effectif n_i	$x_i \times n_i$
[300;500[	400	50	20 000
[300;500[	600	25	15 000
[700;1000[	850	12	10 200
[1000;1500[	1250	3	3750
Total		90	48 950

Exemple 3 :

En utilisant les fréquences (Tableau de l'exemple 2)

Salaire en dinars	[300;500[	[500;700[	[700;1000[	[1000;1500[
Nombre de salariés	50	25	12	3

Classe salaire	Centre x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i
[300;500[	400	50	$\frac{50}{90} = 0{,}55$
[300;500[	600	25	$\frac{25}{90} = 0{,}27$
[700;1000[	850	12	$\frac{12}{90} = 0{,}13$
[1000;1500[	1250	3	$\frac{3}{90} = 0{,}033$
Total		90	

$$\overline{x} = x_i f_i + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 \approx 543{,}89$$

Remarque : Moyenne et mode

* La moyenne d'un caractère quantitatif n'est pas nécessairement une valeur de ce caractère, alors que le mode est une valeur : c'est la valeur qui a un effectif maximum.

Médiane :

On considère un caractère quantitatif :

⇒ Série statistique à caractère continu :

dans le cas des séries d'un caractère continu, l'intervalle de variation du caractère x est partagé en classes, la médiane est la valeur du caractère correspondant à un effectif cumulé égale à la moitié de l'effectif total.

La médiane partage la série classée en deux parties de même effectif.

Méthode graphique pour déterminer la médiane :

* Dans le cas où le caractère est continu par son polygone des effectifs cumulé croissants ou décroissants, on trace la droite horizontale correspondant à la moitié de l'effectif total.

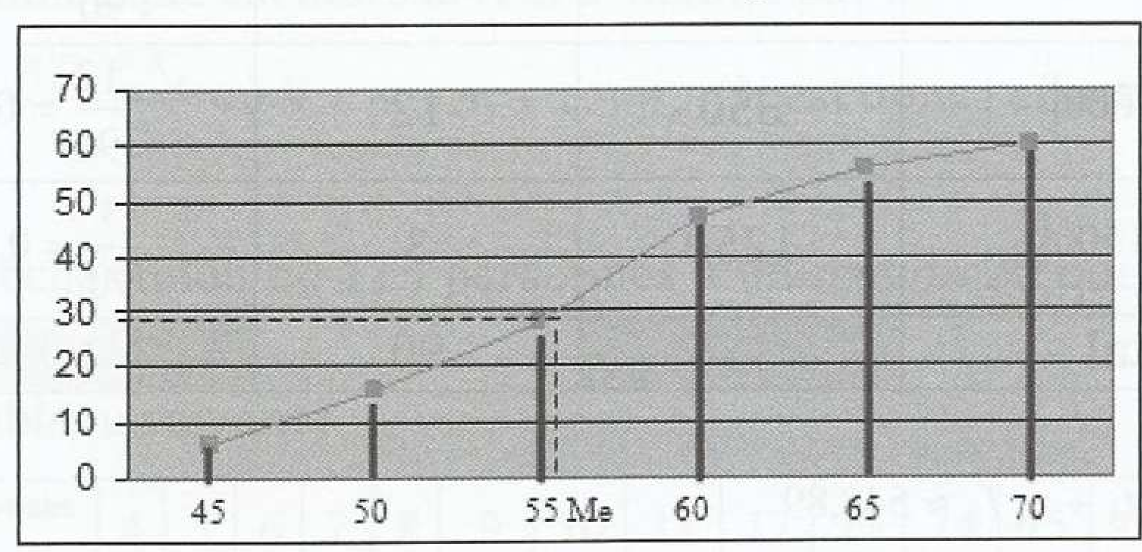
La médiane est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonné est égale à $\frac{N}{2}$ (où N est l'effectif total de la série).

Exemple :

Au cours d'une visite médicale, on a pesé 60 personnes. Les résultats exprimés en kilogrammes sont donnés dans le tableau suivant :

Classes	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	[60;65[	[65;70[
Effectifs	6	10	12	19	9	4
Effectifs cumulés croissants	6	16	28	47	56	60

Le polygone des effectifs cumulés croissant correspondant :



La moitié de l'effectif total est 30 d'après le graphique, la médiane vaut environ 56.

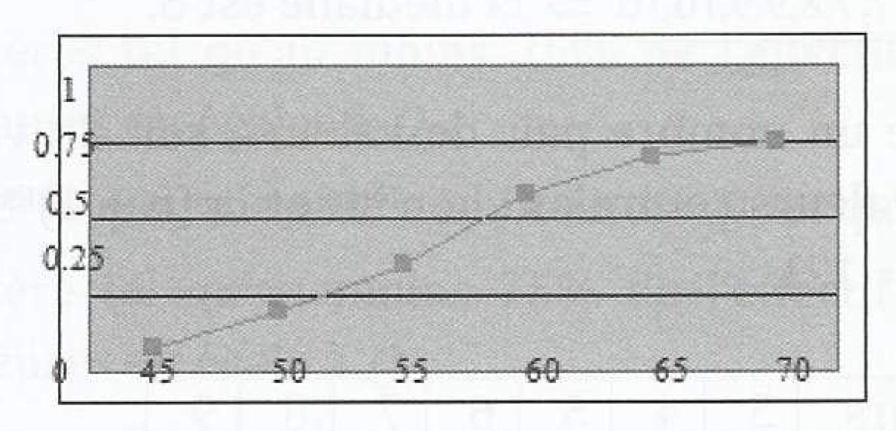
* Dans le cas où le caractère est connu par son polygone des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes, on trace la droite horizontale correspondant à la fréquence cumulé 0,5. La médiane est l'abscisse du point dont l'ordonné est égale à 0,5.

Exemple :

Au cours d'une visite médicale, on a pesé 60 personnes. Les résultats exprimés en kilogrammes sont donnés dans le tableau suivant :

Classes	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	[60;65[	[65;70[
Effectifs	6	10	12	19	9	4
Fréquences	0.1	0.166	0.2	0.317	0.15	0.067
Effectifs cumulés croissants	6	16	28	47	56	60

Le polygone des effectifs cumulés croissant correspondant :

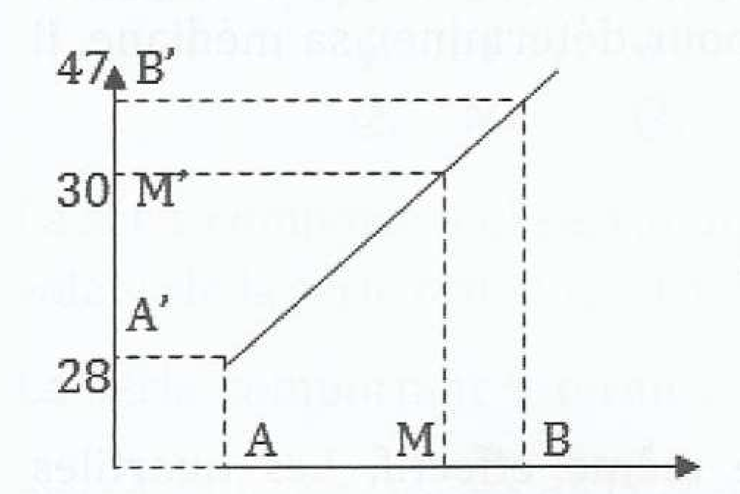


* Méthode de calcule :

La classe médiane est la classe [55;60[. L'effectif cumulé croissant sur les 4 premières classes vaut 47. (47 > 30 : 30 correspond à 50% de l'effectif total).

Calculons la médiane par interpolation linéaire en s'aidant du schéma suivant :

Effectif cumulé croissants



$$\frac{AM}{AB} = \frac{A'M'}{A'B'} \text{ donc } \frac{Me-}{60-}$$

$$\text{d'où } \frac{Me-55}{30-28} = \frac{60-55}{47-28}$$

D'une manière pratique, on utilise le tableau ci-contre :

55	28
Me	30
60	47

$$\frac{Me-55}{30-28}=\frac{60-55}{47-28}$$

$\frac{Me-55}{2}=\frac{10}{19}$ donc $Me-55=\frac{20}{19}$ d'où $Me=55+\frac{20}{19}=56{,}05$.

⇒ Série statistique à caractère direct :

* Si nous ordonnons les valeurs du caractère d'une série statistique par ordre de grandeurs croissantes (ou décroissantes), la médiane est la valeur qui se situe au centre de la série ainsi ordonnée.

* Si le nombre de valeur de la série est impair soit 20n + 1 valeur, la médiane sera la (n + 1) valeur.

Par exemple, le tableau suivant : (N = 15).

Valeurs	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	2	3	2	1	2	1	2	2

Se traduit par la suite : $\underbrace{3,3,4,4,4,5,5}_{7\,termes},6,\underbrace{7,7,8,9,9,10,10}_{7\,termes}$ ⇒ la médiane est 6.

* Dans le cas où la série comporte un nombre pair de valeurs, soit 2n valeurs, la médiane est la moyenne des deux valeurs centrales : la $n^{ième}$ et la $(n + 1)^{ième}$ valeur.

Par exemple, le tableau suivant : (N = 12).

Valeurs	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs	2	3	1	1	2	1	2

Se traduit par la suite : 3,3,4,4,4,<u>**5,6**</u>,7,7,8,9,9

$$Me=\frac{5+6}{2}=\frac{11}{2}=5.5$$

la médiane est la moyenne des termes des rangs 6 et 7 autrement dit le 6ème et 7ème terme.

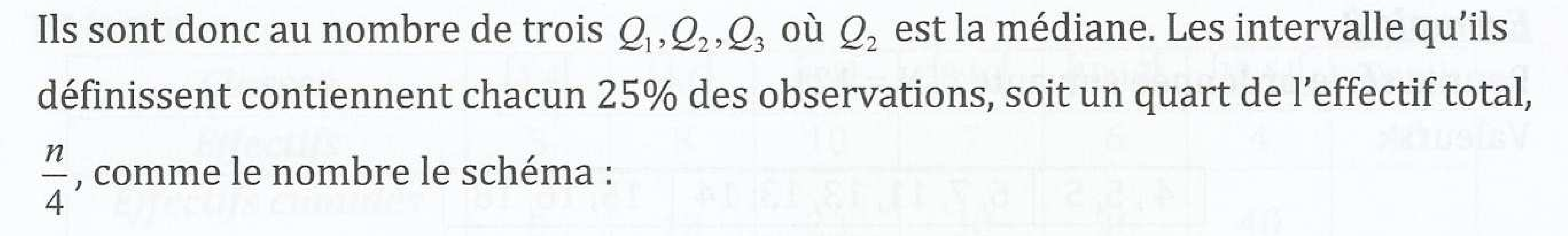
Attention : soit la série suivante : 10,5,2,5,7,3,4,1,2. pour déterminer sa médiane, il faut d'abord l'ordonner : 1,2,2,3,4,5,5,7,10.

Le nombre de valeurs est impair (N = 9).

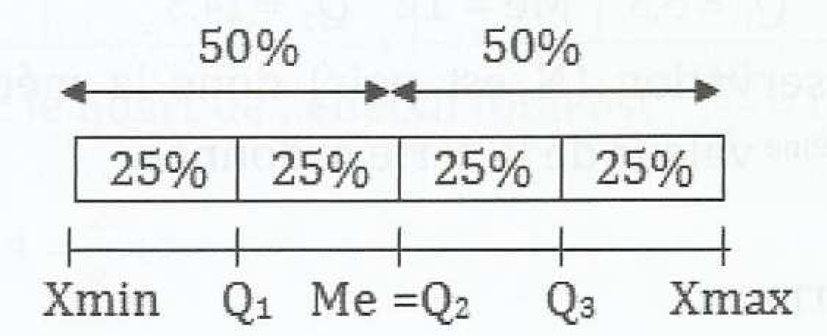
Donc la médiane est la 5ème valeur : <u>**1,2,2,3**</u>,4,<u>**5,5,7,10**</u>

* **Quartiles** :

La médiane partage la série en deux groupes de même effectif. Les quartiles partagent la série en quatre groupes de même effectif.



Ils sont donc au nombre de trois Q_1, Q_2, Q_3 où Q_2 est la médiane. Les intervalle qu'ils définissent contiennent chacun 25% des observations, soit un quart de l'effectif total, $\frac{n}{4}$, comme le nombre le schéma :



Q_1 laisse 25% des observations « avant » et 75% « après ».

Q_3 laisse 75% des observations « avant » et 25% « après ».

- Le 1er quartile est le nombre noté Q_1 et qui est égal à la plus petite valeur du caractères tel qu'au moins 25% de l'effectif de la série prennent des valeurs inférieures ou égales à Q_1.
- La 3ème quartile et le nombre noté Q_3 et qui est égale à la plus petite valeur de caractère tel qu'au moins 75% de l'effectif de la série prennent des valeurs inférieures ou égale à Q_3.
- L'intervalle $[Q_1 Q_3]$ s'appelle intervalle interquartile.

Le réel $Q_3 - Q_1$ s'appelle l'écart interquartile.

⇒ Série statistique à caractère discret :

Exemple 1 :

Pour la série ordonnée suivante : (N = 9)

Valeurs : 4, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15, 16

↓ Q_1 ↓ Me ↓ Q_3

La série comporte 9 observation (N est impair) donc la médiane correspond à la 5ème valeur de la série ordonnée. La médiane est 11.

La série comportant 9 termes, $\frac{9}{4} = 2.25$; on dépasse 2 termes de la série donc on prend Q_1 le 3ème terme de la série c'est-à-dire $Q_1 = 6$.

Q_3 est symétrique de Q_1 par rapport à la médiane d'où :

Exemple 2 :

Pour la série ordonnée suivante : (N = 12).

Valeurs :

4 , 5, 5	6, 7, 11, 13, 13, 14	15, 16, 18

$Q_1 = 5{,}5$ Me = 12 $Q_2 = 14.5$

la série comporte 12 observation (N est pair) donc la médiane correspond à la moyenne de la 6ème et la 7ème valeur de la série ordonnée.

La médiane est 12.

La série comportant 12 termes.

$\frac{12}{4} = 3$; Q_1 est la valeur telle au moins 25% de l'effectif total prenne des valeurs inférieures ou égales à Q_1. On prend $Q_1 = 5{,}5$.

$12 \times \frac{3}{4} = 9$. On ne peut pas prendre la 9ème observation.

On prend $Q_3 = 14{,}5$.

⇒ **Série statistique à caractère continu :**

1er façon :

au moyen d'une interpolation linéaire en utilisant le tableau des effectifs cumulés.

2ème façon :

dans le cas d'une série classé, le procédé de détermination des quartiles est identique à celui de détermination de la médiane, la méthode graphique est la plus employée.

- Le quartile inférieur Q_1 est l'abscisse du point d'ordonné $\frac{1}{4}$ sur le polygone des fréquences cumulées et $\frac{N}{4}$ sur le polygone des effectifs cumulés.
- Le quartile supérieur Q_3 est l'abscisse du point d'ordonné $\frac{3}{4}$ sur le polygone des fréquences cumulées et $\frac{3N}{4}$ sur le polygone des effectifs cumulés.

Exemple : On donne la série suivante des salariés d'une entreprise selon leurs classes des salaires mensuels nets exprimés en centaines de dinars :

Classes	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[	[12;14[	Total
Effectifs	5	8	10	7	6	4	40

On veut déterminer les quartiles de cette série.

1er façon :

Classes	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$	$[8;10[$	$[10;12[$	$[12;14[$	Total
Effectifs	5	8	10	7	6	4	40
Effectifs cumulés croissants	5	13	23	30	36	40	

Calcul du 1er quartile : le quart de l'effectif total est : $\frac{40}{4}=10$.

$\frac{Q_1-4}{10-5}=\frac{6-4}{13-5}$ donc $Q_1-4=\frac{2}{8}\times 5$

4	5
Q_1	10
6	13

d'où $Q_1=\frac{5}{4}+4=\frac{21}{4}=5{,}25$ en centaines de dinars.

$Q_1=525$ dinars.

Calcul du 2ème quartile : Médiane : la moitié de l'effectif total est $\frac{40}{2}=20$.

$\frac{Me-6}{8-6}=\frac{20-13}{23-13}$ donc $Me-6=\frac{7}{10}\times 2$

6	13
Me=Q_1	20
8	23

d'où $Me=\frac{7}{5}+6=\frac{37}{5}=7{,}4$

Me = 7,4 (en centaines de dinars) donc Me = 740 dinars.

Calcul du 3ème quartile : $\frac{3}{4}N=30$

Sur le tableau on lit : 30 personnes ont une salaire inférieur à 1000 dinars.

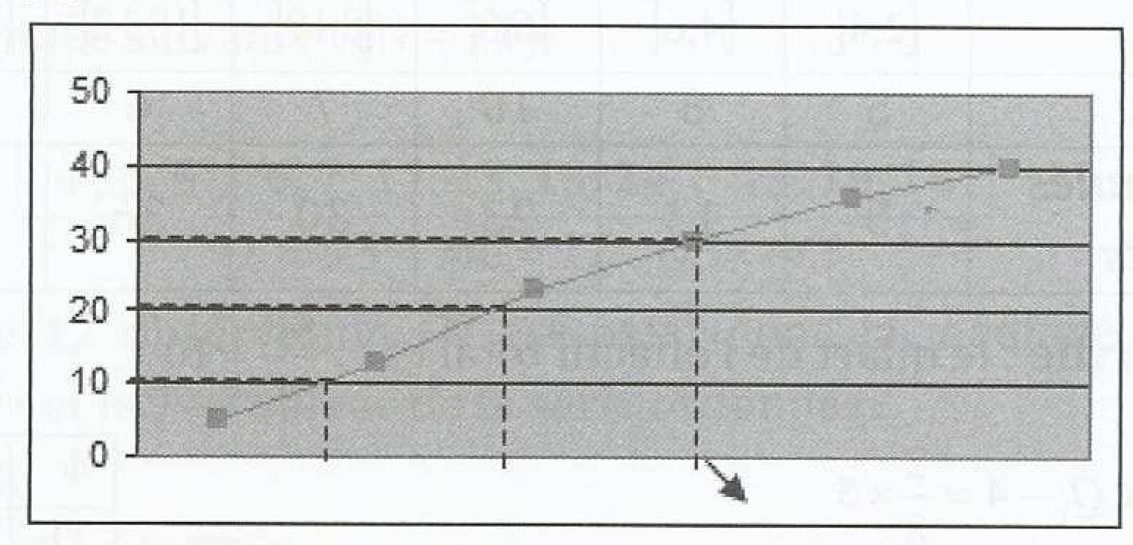
Donc $Q_3=1000$ dinars.

2ème façon :

On construit le polygone des effectifs cumulés, ou bien on construit le polygone des fréquences cumulées croissantes.

Classes	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$	$[8;10[$	$[10;12[$	$[12;14[$	Total
Effectifs	5	8	10	7	6	4	40
Effectifs cumulés croissants	5	13	23	30	36	40	

Polygone des effectifs cumulé croissants :



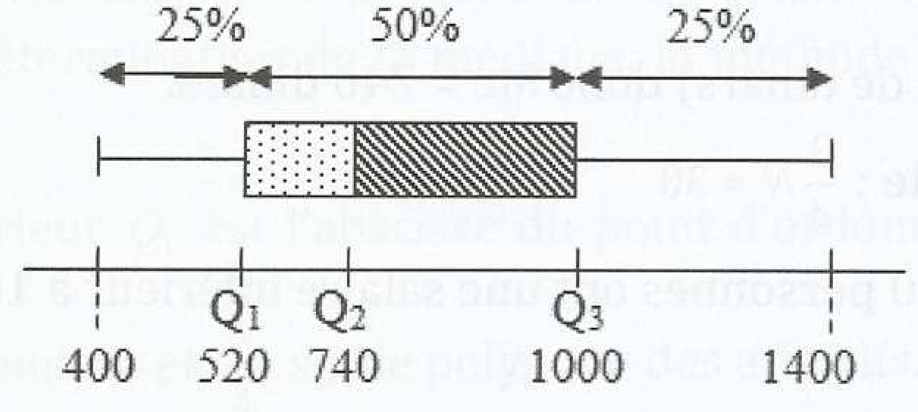
$Q_1 = 520$ dinars ; $Q_2 = 740$ dinars ; $Q_3 = 1000$ dinars

L'intervalle interquartile est $[520;1000]$.

L'écart interquartile est égale à 1000 – 520 = 480 dinars.

Diagramme en boite :

Sur une échelle allant du minimum au maximum de la série, on place la médiane Me et les deux autres quartiles Q_1 et Q_3. On trace un rectangle de longueur Q_3 - Q_1 ; c'est-à-dire l'écart interquartile coupé par un trait à la hauteur de la médiane. On prolonge de chaque coté de la « boite » par des trais allant jusqu'au minimum d'un côté et au maximum de l'autre.



Les trois quarts de l'effectif sont 30, ce sont tous les salariés dont le salaire est inférieur à 1000 D.

50 % des salariés ont un salaire entre 520DT et 1000DT.

1) *Paramètres de dispersion :*

Etendue :

L'étendue d'une série statistique est la différence entre ses deux valeurs extrêmes (le plus grande et la plus petite valeur du caractère).

Exemple 1:

Classes	[10;50[	[50;100[	[100;200[	[200;300[	[300;500[
Effectifs	18	104	47	23	6

L'étendue est 500 – 10 = 490.

Exemple 2 :

Modalités	1	2	3	4	5	6	7
Effectifs	90	60	30	60	30	0	30

L'étendue est 7 – 1 = 6

Remarque :

Moyenne et étendue

La moyenne ne résume pas toujours toute l'information qu'on veut extraire d'une série statistique.

Les deux séries ci-dessous, de même moyenne, semblent inégalement dispersées.

-2,4 -0,4 1,6 -3,4 -2,4 1,6 3,6 -1,4 0,6 2,6

6 -3 -4 8 6 -12 7 5 4 -17

La première série a pour étendus 3,6 – (-3,4) = 7

La seconde série a pour étendue 8 – (-17) = 25

La second série est plus dispersée que la première.

Variance :

La variance est la différence entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne :

$$V = \frac{n_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + n_2\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + n_p\left(x_p - \overline{x}\right)^2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$$

pour le calcule pratique : $V = \frac{n_1 \times x_1^2 + n_2 x_2^2 + \ldots + n_p x_p^2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p} - \overline{x}^2$

Ecart type :

L'écart type est la racine carrée de la variance, on le note σ ; $\sigma = \sqrt{V}$.

L'écart type d'une série statistique est une mesure de la plus ou moins grande dispersion des valeurs de la série par rapport à la moyenne de la série. Un écart type important signifie que les valeurs de la série s'éloignent souvent et de façon importante de la moyenne.

Exemple :

On donne la série suivante :

Modalités	15	18	19	20	21	22
Effectifs	1	1	2	2	4	6

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
15	1	15	225
18	1	18	324
19	2	38	722
21	2	40	800
21	4	84	1764
22	6	132	2904
Total	16	327	6739

$\overline{X} = 20{,}44$; $V = 3{,}5$; $\sigma = 1{,}87$

Remarque :

On peut obtenir N , $\overline{X}$, V et σ directement à partir de la calculatrice.

D. Séries chronologiques :

- Le coefficient multiplicateur qui permet de passer de l'année b à l'année n est égal au quotient de la valeur de l'année n par la valeur de l'année b.

$$C = \frac{valeur de l' année n}{valeur de l' année b}$$

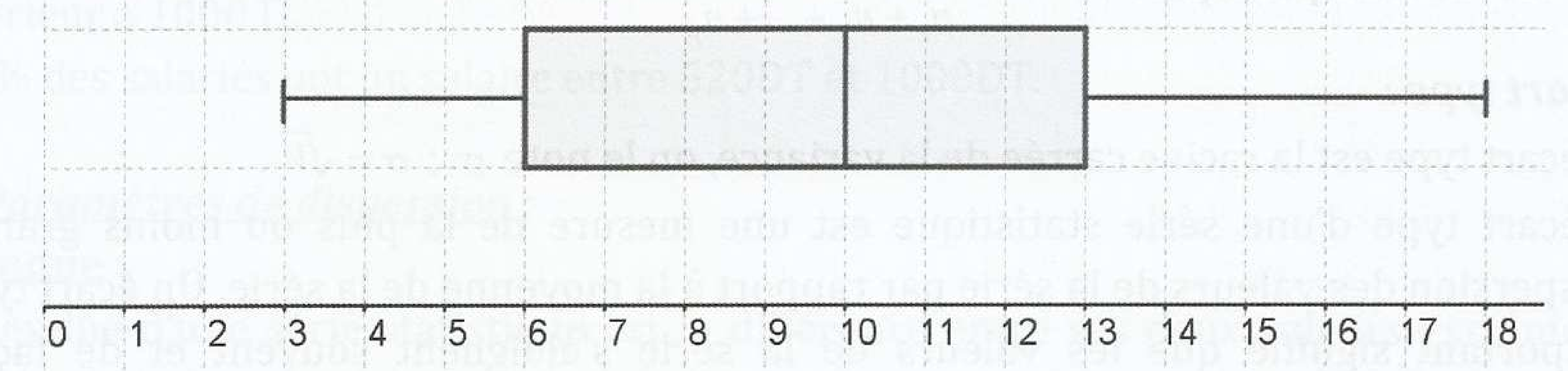
- L'indice I de l'année n, base 100 en l'année b est égale à : $I = C \times 100$

II) Exercices :



Q-C-M

On a résumé une série statistique par le diagramme en boite ci-dessous :



1) L'étendue est de :

a) 18 **b)** 10 **c)** 15 **d)** 20

2) La moyenne est de :

a) 10 **b)** 9,5 **c)** On ne peut pas savoir **d)** 10,5

3) La médiane est de :

a) 10 **b)** 9,5 **c)** On ne peut pas savoir **d)** 10,5

4) L'écart inter-quartile est de :

a) 15 **b)** 3 **c)** 7 **b)** 5



2 VRAI-FAUX

1) Dans un diagramme en boîte, la médiane se situe toujours au milieu de la boîte.
2) L'écart type est toujours un nombre positif.
3) Un écart type nul signifie que toutes les valeurs de la série sont égales.
4) Pour une série ordonnée de 341 valeurs, le premier quartile est la 86ème valeur.
5) Dans un diagramme en boîte, la boîte « contient » 75% des valeurs de la série.



3 APPLIQUER

Dans une classe de 30 élèves,
- la moyenne des 20 filles est 11,5,
- la moyenne des 10 garçons est 8,5.

Donner la moyenne de classe.



4 APPLIQUER

Après correction des copies, la moyenne à l'épreuve de Mathématiques au Baccalauréat est 8,4.Si le ministère de l'Education Nationale décide d'augmenter la note de chaque copie de :

1)1,6 point, quelle sera la nouvelle moyenne nationale ?
2) 10%, quelle sera la nouvelle moyenne nationale ?



5 APPLIQUER

Un relevé des durées de communications téléphoniques effectuées dans un central téléphonique a fourni les informations consignées dans le tableau suivant (l'unité de durée estla minute)

Intervalle de durée	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[
Effectif	**14**	**16**	**25**	**15**	**17**	**13**

1) Calculer la durée moyenne d'un appel.

2) On regroupe les classes par deux, ce qui revient à considérer les classes : [0 ; 4[, [4 ; 8[et [8 ; 12[. Calculer la durée moyenne d'un appel pour cette nouvelle série.

3) Quelle conclusion pouvez-vous formuler ?



APPLIQUER

Un établissement de transfusion sanguine a dressé le bilan de sa collecte de sang pendant un an.

Age du donneur	Proportion en %
Mois de 20 ans	4%
Entre 20 et 29 ans	14%
Entre 30 et 39 ans	24%
Entre 40 et 49 ans	32%
Plus de 50 ans	26%

Représenter cette série statistique par un diagramme circulaire.



APPLIQUER

Le tableau ci-dessous donne la répartition des salaires mensuels, en DT, des employés d'une entreprise :

Salaire	[800;900[	[900;1000[	[1000;1050[	[1050;1150[	[1150;1300[
Effectif	42	49	74	19	16

1) Calculer le salaire moyen dans cette entreprise. Que penser d'un tel résultat ?

2) Dans cette entreprise, combien d'employés gagnent au plus 1050 DT ?

3) Dresser le polygone des effectifs cumulés croissants et lire une valeur approchée de la médiane et de Q1 et Q3.

4) Construire le diagramme en boîte de la série statistique.



S'ENTRAINER

Un entomologiste a fait des relevés sur la taille de 50 courtilières adultes :

33, 35, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41,41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 48, 48, 50.

1) Organiser les relevés dans un tableau d'effectifs semblable au suivant :

Valeur	**33**	**34**	**35**	**36**						**50**
Effectif										
E.C.C										

2) Représenter les données par un diagramme à bâtons.

3) Calculer la moyenne de la série.

4) Déterminer sa médiane.

Déterminer les 1er et 3ième quartiles puis les 1er et 9ième déciles.

Construire le diagramme en boîte correspondant.

5) On regroupe les données en classes. Compléter le tableau des effectifs suivants :

Classes	[33 ; 37[	[37 ; 40[	[40 ; 42[	[42 ; 44[	[44 ; 47[	[47 ; 51[
Effectifs						

Dessiner l'histogramme correspondant.

9 *S'ENTRAINER*

Le tableau ci-dessous donne la répartition des notes obtenues a un contrôle de maths par 25 élèves d'une classe de 2ème années secondaires :

Notes	**[1;3[**	**[3;5[**	**[5;7[**	**[7;9[**	**[9;11[**	**[11;13[**	**[13;15[**	**[15;17[**	**[17;19[**
Effectifs	**1**	**2**	**1**	**5**	**4**	**1**	**7**	**3**	**1**
Fréquence									
F.C.C									

1) Calculer la note moyenne exacte (une ligne vide dans le tableau vous est proposée, vous pouvez vous en servir si vous le souhaitez ...).

2) Compléter le tableau.

3) a) Représenter graphiquement les fréquences cumulées croissantes.

b) Déterminer graphiquement la médiane, les premier et troisième quartiles (votre démarche doit être visible, c'est-à-dire avec des traces sur le graphique).

c) Donner l'intervalle inter-quartile.

d) Calculer l'écart inter-quartile et l'étendue de cette série de notes (je veux voir le calcul).

e) Construire le diagramme en boite de cette série de notes.



SEPERFECTIONNER

Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques eten Sciences physiques :

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	1	0	2	0	1	3	0	5	0	2	1	1	0	0	0	2	1	1	0	2
physiques	0	1	0	0	0	0	0	4	4	1	0	3	1	4	2	0	1	0	0	0	1

1) a)Déterminer les rangs des quartiles et de la médiane des deux séries puis donnerleurs valeurs.

b) Faire le diagramme en boite des deux séries sur une même échelle puis commenter le diagramme.

2) a) Déterminer la moyenne des notes de Mathématiques et la comparer à la médiane en expliquant ce qui cause cet écart.

b) Déterminer la moyenne des notes de Sciences de la vie et de la terre. L'écart avec la moyenne est-il le même ? Pourquoi ?

c) Déterminer les écarts types des deux séries (arrondis au dixième) et commentervos résultats.



SEPERFECTIONNER

Huit sprinters effectuent deux 100 m.

Leurs temps sont donnés dans le tableau suivant :

Sprinter	A	B	C	D	E	F	G	H
Sprint 1	10"14	10"17	9"94	10"05	10"25	10"09	9"98	10"32
Sprint 2	10"41	9"97	9"96	10"12	10"19	10"24	10"12	10"17

Soit (xi) les temps respectifs des sprinters $A, B, \dots, H$ au sprint 1

et (yi) les temps respectifs des sprinters $A, B, \dots, H$ au sprint 2.

1) Calculer les moyennes x et y des séries (xi) et (yi).

2) Calculer les écarts-types sxet sydes séries (xi) et (yi).

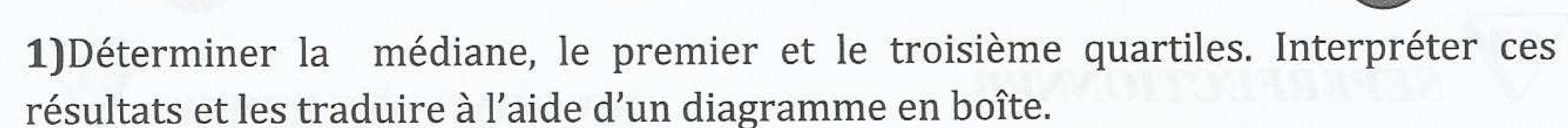
3) Lequel des deux sprints a été le plus homogène ?



SEPERFECTIONNER

Le tableau suivant donne le montant des salaires annuels exprimés en milliers DT d'une petite entreprise.

Salaires	16	18	20	25	30	40
Nombre de salariés	6	9	10	8	5	2



1) Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartiles. Interpréter ces résultats et les traduire à l'aide d'un diagramme en boîte.

2) Calculer le montant en DT du salaire moyen annuel de cette entreprise.

3) A l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à DT près de l'écart-type s.

4) Soit S la fonction définie sur IR par :

$$S(x)=6(16-x)^2+9(18-x)^2+10(20-x)^2+8(25-x)^2+5(30-x)^2+2(40-x)^2.$$

a) Vérifier que $S(x)=40x^2-1776x+21152$.

b) Déterminer le sens de variations de la fonction S et en déduire sa valeur minimale.

c) Retrouver le calcul de la variance à partir de la somme S. En déduire la valeur exacte de l'écart-type s.



13 SEPERFECTIONNER

Le tableau suivant récapitule les moyennes trimestrielles obtenues par trois classes de 30 élèves:

Classe 1	notes	2,5	4,5	5	6	6,5	7,5	8,5	9	10	10,5	12	12,5	13	13,5	14	15,5
	effectifs	1	2	2	2	4	2	1	1	1	2	1	5	2	1	1	2
Classe 2	notes	2	2,5	3	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8	8,5	10,5	11,5	12,5	13	14,5	15,5
	effectifs	1	2	1	3	1	1	5	1	1	2	2	2	2	2	2	2
Classe 3	notes	1,5	2,5	3	3,5	4,5	5,5	6	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	12	12,5	13	14,5
	effectifs	1	2	1	4	1	1	1	3	1	2	2	1	1	4	1	4

1) Pour chacune des trois classes :

a) Déterminer la note médiane, le premier et le troisième quartiles.

b) Représenter la répartition des notes des trois classes à l'aide d'un diagramme en boîte.

c) Calculer l'étendue, la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type s, à 10^{-2} près.

d) Calculer à 1% près le pourcentage d'élèves dont la note est comprise dans l'intervalle interquartile ainsi que dans l'intervalle $[\overline{x}-s\,;\,\overline{x}+s]$.

2) On décide de rééquilibrer les moyennes des trois classes de la façon suivante :

- On multiplie toutes les notes de la deuxième classe par 1,12
- On ajoute 1,2 à toutes les notes de la troisième classe.

Pour chacune de ces deux classes recalculer :

a) La moyenne $\overline{x}$ et l'écart type s, à 10^{-2} près.

b) Calculer à 1% près le pourcentage d'élèves dont la note est comprise dans l'intervalle interquartile ainsi que dans l'intervalle $[\overline{x}-s\,;\,\overline{x}+s]$.



SEPERFECTIONNER

1) Les 498 premières décimales du nombre π sont :

3,

141 592 653 589 793 238 462 643 383
279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592
307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067
982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582
231 725 359 408 128 481 117 450 284 102 701 938
521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810
975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271
201 909 145 648 566 923 460 348 610 454 326 648
213 393 607 260 249 141 273 724 587 006 606 315
588 174 881 520 920 962 829 254 091 715 364 367
892 590 360 011 330 530 548 820 466 521 384 146
951 941 511 609 433 057 270 365 759 591 953 092
186 117 381 932 611 793 105 118 548 074 462 379
962 749 567 351 885 752 724 891 227 938 183 011
949

Les différentes décimales (= chiffres après la virgule) sont les entiers 0,1,2,3,....,9.
On se propose de compter combien de fois apparaît chacun des chiffres de 0 à 9 dans l'écriture précédente *(attention : on ne compte que les chiffres après la virgule donc le premier 3 ne doit pas être compté).*
Compléter le tableau suivant :

décimales	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
effectif											*498*
fréquence											*100 %*

2) Une valeur approchée rationnelle de π est $\frac{22}{7}$

a) En posant la division, écrire $\frac{22}{7}$ avec 6 chiffres, 12 chiffres puis 18 chiffres après la virgule. Que remarque-t-on ? Est-ce normal ?

b) On souhaite écrire le développement décimal de $\frac{22}{7}$ avec 498 chiffres après la virgule. Combien de fois la période 142857 va-t-elle se répéter ?

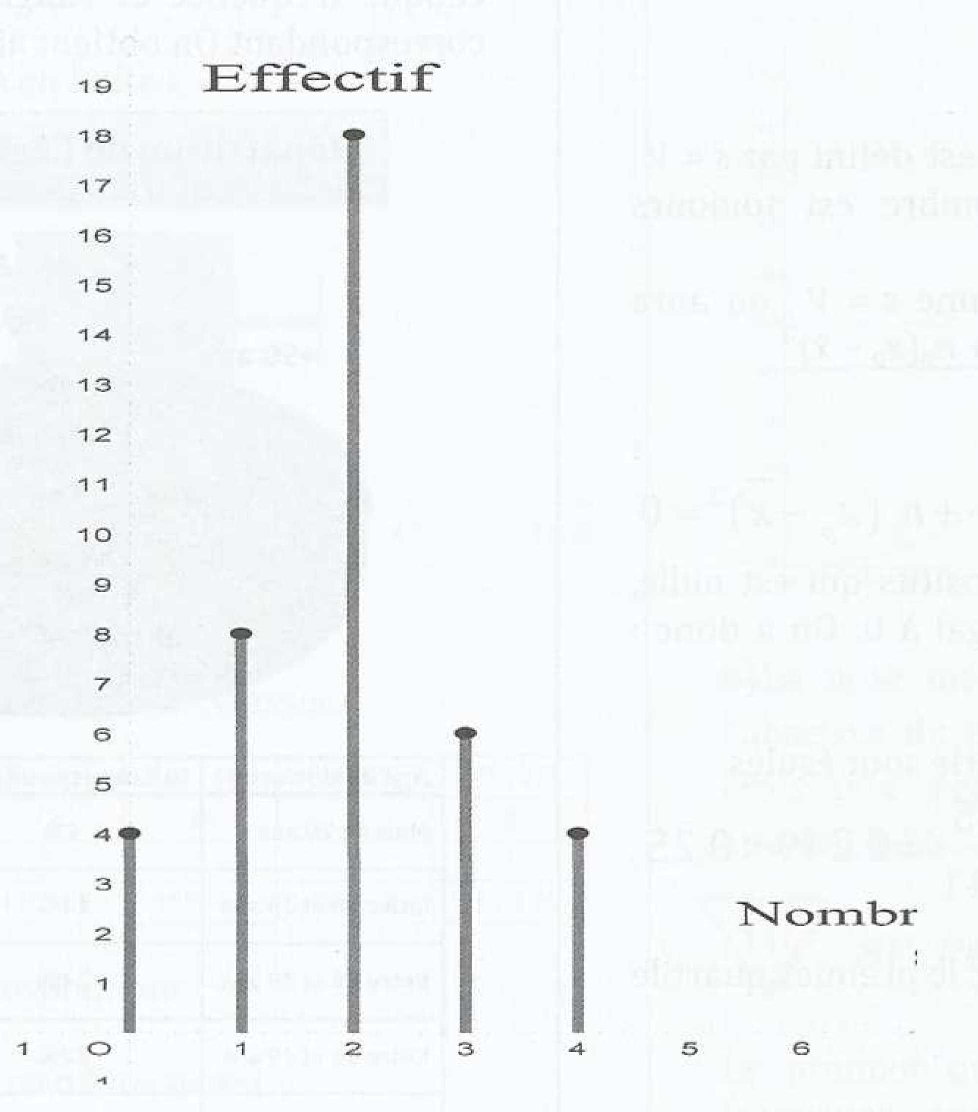
c) Faire le même tableau qu'en 1) concernant les 498 premières décimales de $\frac{22}{7}$.

3) Comparer les deux études statistiques.



SEPERFECTIONNER

Dans un groupe de 40 élèves, on mène une enquête sur le nombre de frères et sœurs de chaque élève ainsi que sur l'argent de poche par semaine. Les résultats sont présentés ci-dessous :



Série 1 :

xi: nombre de frères et sœurs					
ni: Effectif					
E i ↗					

Série 2 :

Xi : Argent de poche en dinars	[0 , 5 [	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[
Effectif ni	6	2	25	4	3
E i ↗					

1) Recopier et compléter les tableaux ci-dessus :

2) Préciser la nature du caractère étudié dans chaque série.

3) Pour la série 1: déterminer le mode, la médiane, la moyenne, la variance et l'écart type.

4) Pour la série 2 :

a) Déterminer le mode, la moyenne et la médiane (par calcul)

b) Tracer le polygone des effectifs cumulés croissantes et en déduire des valeurs approchées des quartiles Q_1 , Q_2 et Q_3 de la série.



1 Q-C-M

1)L'étendue est de 18 – 3 = 15
2) On ne sait pas quelle est la moyenne
3) La médiane est de 10
4) L'écart inter-quartile est de 13 – 6 = 7.



2 VRAI-FAUX

1) FAUX :
2) VRAI : *preuve* : L'écart-type est défini par $s = V$, or, la racine carrée d'un nombre est toujours positive. Ainsi, on a bien : $\sigma \geq 0$.
3) VRAI : *preuve* : Si s=0, comme $s = V$, on aura

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + ... + n_p(x_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + ... + n_p}$$

Donc :

$$n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p - \overline{x})^2 = 0$$

On a une somme de termes positifs qui est nulle, chaque terme est forcément égal à 0. On a donc : $x_1 = \overline{x} = x_2 = \cdots = x_p$.
Ainsi, toutes les valeurs de la série sont égales.
4) FAUX : *preuve* : Calculons $\frac{85}{341} \approx 0.249 < 0.25$, tandis que $\frac{86}{341} \approx 0.252$. Donc le premier quartile sera la 86ème valeur.
5) FAUX : *preuve* : Les moustaches du diagramme correspondent chacune à un quartile, et représentent donc chacune 25% de la population étudiée. La boîte correspond donc quant à elle les 50% restant de la population.



3 APPLIQUER

Pour calculer la moyenne de la classe constituée par ces 2 sous-groupes (filles/garçons), il faut tenir compte des effectifs de chacun de ces sous-groupes. La moyenne de classe vaut donc :

$$\frac{n_f \overline{f} + n_g \overline{g}}{n_f + n_g} = \frac{20 \times 11{,}5 + 10 \times 8{,}5}{20 + 10} = \frac{315}{30} = 10{,}5.$$



4 APPLIQUER

1°) 1,6 point, la nouvelle moyenne nationale sera augmentée de 1,6 et vaudra donc **10** ;
2°) 10%, la nouvelle moyenne nationale sera multipliée par 1,10 et vaudra donc **9,24**.

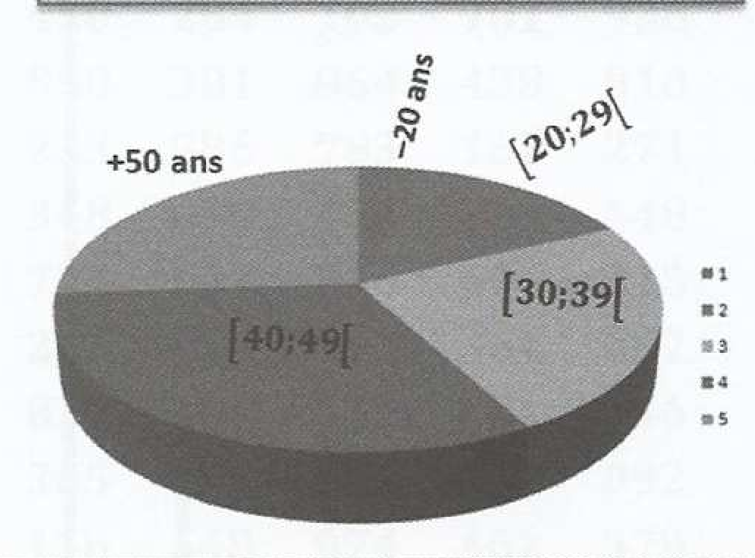
$$\Rightarrow 3T_n = \frac{3n}{2(3n+2)} \Rightarrow T_n = \frac{n}{6n+4}$$



6 APPLIQUER

On dresse un tableau de proportionnalité entre chaque fréquence et l'angle du secteur angulaire correspondant On obtient ainsi :

Répartition de l'âge des donneurs



Age du donneur	% Correspondant	Angle
Mois de 20 ans	4%	$\frac{3 \times 360}{100} \times 100 = 14{,}4°$
Entre 20 et 29 ans	14%	$\frac{14 \times 360}{100} \times 100 = 50{,}5°$
Entre 30 et 39 ans	24%	$\frac{24 \times 360}{100} \times 100 = 86{,}4°$
Entre 40 et 49 ans	32%	$\frac{32 \times 360}{100} \times 100 = 115{,}2°$
Plus de 50 ans	26%	$\frac{26 \times 360}{100} \times 100 = 93{,}62°$
TOTAL	100%	360°

8 S'ENTRAINER

1) Tableau d'effectifs :

Valeur	33	35	36	37	38	39	40	41	42
Effectif	1	1	2	3	3	4	5	7	6
e.c.c.	1	2	4	7	10	14	19	26	32
Valeur	43	44	45	46	47	48	50	Total	
Effectif	4	4	3	2	2	2	1	50	
e.c.c.	36	40	43	45	47	49	50		

2) Diagramme à bâtons :

Taille des courtilières adultes

31 35 39 43 47 51 *Taille*

4) ◗ Médiane :

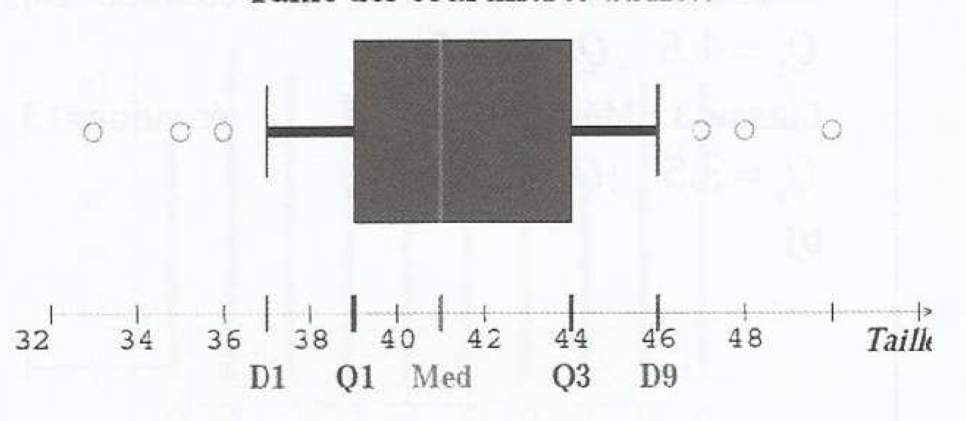
$$M_e = \frac{x_{25}+x_{26}}{2} = \frac{40+41}{2} = 40,5.$$

◗ Quartiles : ⇨ $0,25\times 50 = 12,5$ donc

$Q_1 = x_{12} = 39$ et $0,75\times 50 = 37,5$ donc

$Q_3 = x_{45} = 46$.

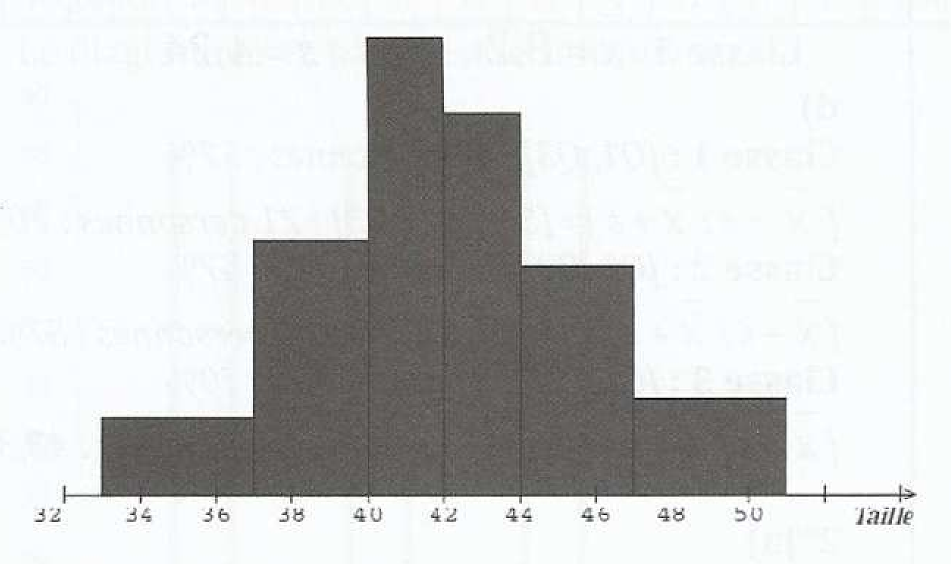
D'où le diagramme en boîte :



5) On regroupe les données en classes.

sses	[33 ; 37[	[37 ; 40[	[40 ; 42[	[42 ; 44[	[44 ; 47[	[47 ; 51[
ectifs	4	10	12	10	9	5
geur	4	3	2	2	3	4
uteur	4/4 = 1	10/3 ≈ 3,3	12/2 = 6	10/2 = 5	9/3 = 3	5/4 = 1,25

Histogramme correspondant :





S'ENTRAINER

1°)

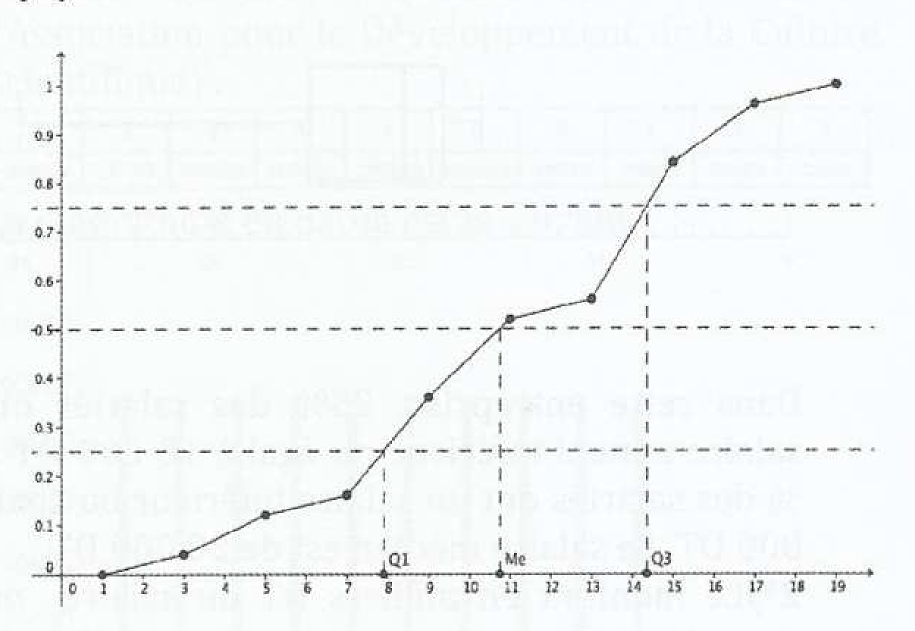
$$M = \frac{1\times 2 + 2\times 4 + 1\times 6 + 5\times 8 + 4\times 10 + 12 + 7\times 14 + 3\times 16 + 1\times 18}{25}$$

$$= \frac{272}{25} = 10,88$$

2)

Notes	[1;3[	[3;5[	[5;7[	[7;9[	[9;11[	[11;13[	[13;15[	[15;17[	[17;19[
Effectifs	1	2	1	5	4	1	7	3	1
Fréquence	0,04	0,08	0,04	0,2	0,16	0,04	0,28	0,12	0,04
F.C.C	0,04	0,12	0,16	0,36	0,52	0,56	0,84	0,96	1

3)a)



b) La note médiane de cette série de notes est l'abscisse du point qui a une fréquence cumulée croissante égale a 0,5. On lit graphiquement environ **10,8**.



SE PERFECTIONNER

Le premier quartile est l'abscisse du point qui a un fréquence cumulée croissante égale a 0,25, on l graphiquement environ **7,8**.

Le troisième quartile est l'abscisse du point qui a une fréquence cumulée croissante égale a 0,75, on lit graphiquement environ **14,3**.

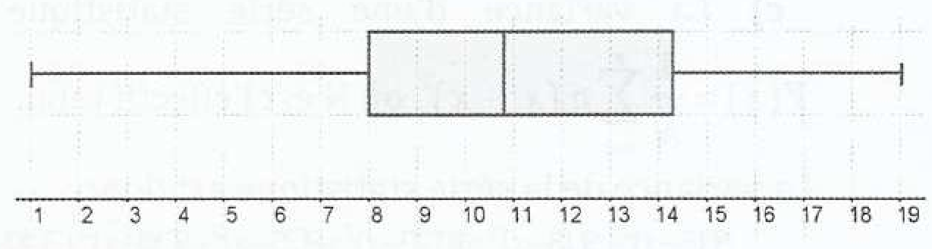
c) L'intervalle inter-quartile est **[7,8 ; 14,3]**.

d) L'écart inter-quartile est égal a 14,3 – 7,8 = **6,5**.

L'étendue est égale a

max – min = 19 – 1 = **18**.

e)

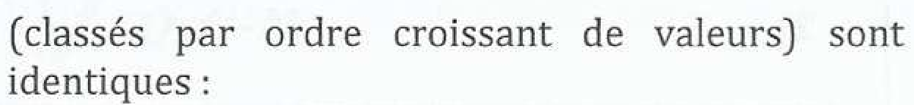




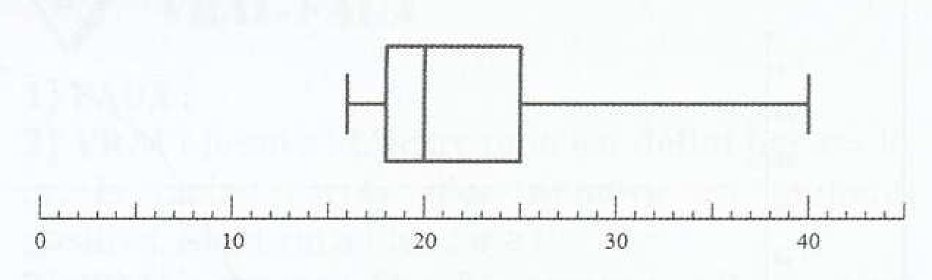
SE PERFECTIONNER

1) L'effectif total est de 40 salariés.

La médiane définit deux groupes de 20 salariés. Comme les 20[ème] et 21[ème] montants des salaires



(classés par ordre croissant de valeurs) sont identiques :
la médiane est alors égale à 20 milliers DT.
Le premier quartile Q1 est défini par le 10[ème] salaire donc Q1=18.
Le troisième quartile Q3 est défini par le 30[ème] salaire donc Q3 =25.



Dans cette entreprise, 25% des salariés ont un salaire annuel inférieur ou égal à 18 000 DT et 75 % des salariés ont un salaire inférieur ou égal à 25 000 DT. Le salaire médian est de 20 000 DT.

2°) Le montant en milliers DT du salaire moyen annuel est :

$$\bar{x}=\frac{\mathbf{6\times16+9\times18+10\times20+8\times5+5\times30+2\times40}}{\mathbf{40}}=\mathbf{22{,}2}$$

3°) Arrondi à $\mathbf{10^{-3}}$ près, l'écart-type obtenu à l'aide de la calculatrice est $s=\mathbf{5{,}997}$.

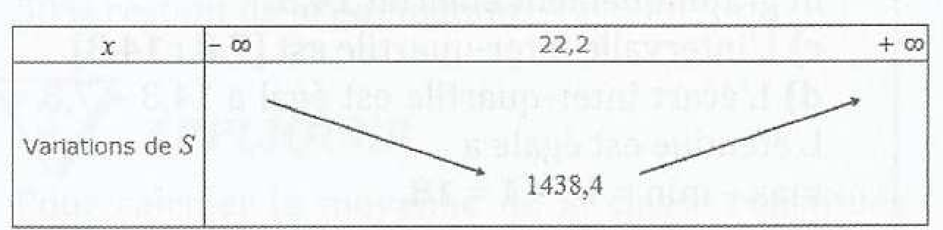
a) facile.

b) S est une fonction polynôme du second degré avec $a=\mathbf{40}$, $b=\mathbf{-1776}$ et $c=\mathbf{21152}$

a >0 , alors S admet un minimum atteint pour : $x=\frac{-b}{2a}$ soit pour $x=-\frac{-1776}{80}=22{,}2$

D'autre part, $S(22{,}2)=1438{,}4$

Tableau de variation de la fonction S :



Le minimum de S est 1438,4 atteint pour x = 22,2.

c) La variance d'une série statistique est $V(x)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i(x_i-\bar{x})^2$ où N est l'effectif total.

La variance de la série statistique est donc :

$$V(x)=\frac{6(16-\bar{x})^2+9(18-\bar{x})^2+10(20-\bar{x})^2+8(25-\bar{x})^2+5(30-\bar{x})^2+2(40-\bar{x})^2}{40}=\frac{S(\bar{x})}{40}$$

Or le montant en milliers DT du salaire moyen annuel est: $\bar{x}=22{,}2$. C'est la valeur qui rend minimale la fonction S. D'où $V(x)=\frac{1438{,}4}{40}=35{,}96$.

Ainsi, la variance de la série statistique est $V(x)=35{,}96$ et l'écart-type est $s=\sqrt{35{,}96}$.



13 SE PERFECTIONNER

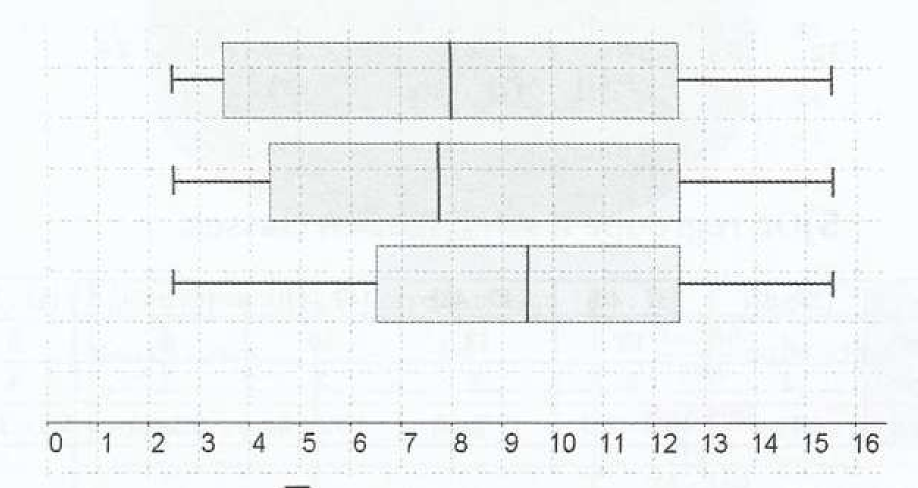
1°) a)

Classe 1 :Médiane : 9,5 ; étendue=13 ;
$Q_1=6{,}5$; $Q_3=12{,}5$.

Classe 2 : Médiane : 7,75 ; étendue=13,5 ;
$Q_1=4{,}5$; $Q_3=12{,}5$

Classe 3 : Médiane : 8 ; étendue=13 ;
$Q_1=3{,}5$; $Q_3=12{,}5$

b)



c)Classe 1 : $\bar{x}=9{,}4$; $s=3{,}63$

Classe 2 : $\bar{x}=8{,}35$; $s=4{,}22$

Classe 3 : $\bar{x}=8{,}2$; $s=4{,}24$

d)

Classe 1 : *[Q1, Q3] : 17 personnes : 57%*

$[\bar{x}-s\,;\,\bar{x}+s]$= [5,77 ; 13,03] : 21 personnes : 70%

Classe 2 : *[Q1, Q3] : 17 personnes : 57%*

$[\bar{x}-s\,;\,\bar{x}+s]$= [4,13 ; 12,57] : 17 personnes : 57%

Classe 3 : *[Q1, Q3] : 21 personnes : 70%*

$[\bar{x}-s\,;\,\bar{x}+s]$= [3,96 ; 12,44] : 13 personnes : 43,3%

2°)a)

Classe 2 : *médiane : 8,68 ; x = 9,352 ; s = 4,72 ; Q1 = 5,04 ; Q3= 14*

Classe 3 : *médiane : 9,2 ; x = 9, 4 ; s = 4,24 ; étendue = 13 ; Q1 = 4,7 ; Q3=13,7*

Classe 2 : *[Q1, Q3] : 17 personnes : 57%*

$[\bar{x}-s\,;\,\bar{x}+s]$= [4,632 ; 14,072] : 17 personnes : 57%

Classe 3 : *[Q1, Q3] : 21 personnes : 70%*

$[\bar{x}-s\,;\,\bar{x}+s]$= [5, 16; 13,64] : 13 personnes : 43,3%

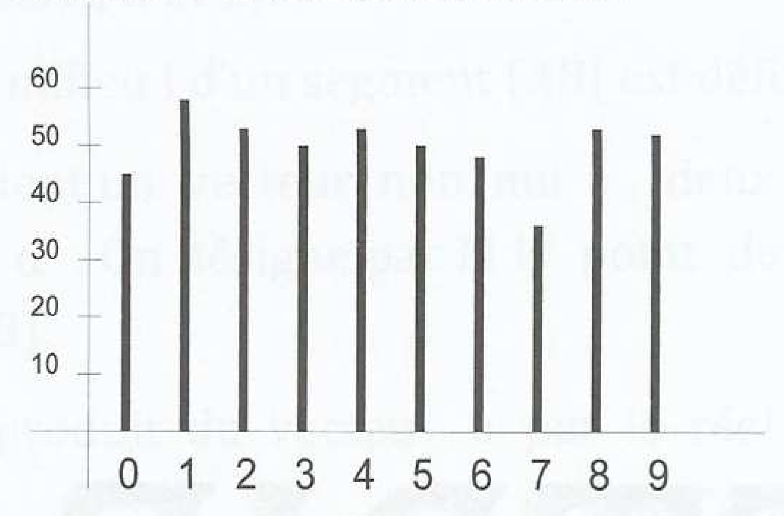


SE PERFECTIONNER

1)Les statistiques demandées concernant les 498 premières décimales de π conduisent au tableau ci-dessous :

décimale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
effectif	45	58	53	50	53	50	48	36	53	52	**498**
fréquence	9	12	11	10	11	10	10	7	11	10	**100**

Le diagramme en bâton est le suivant :



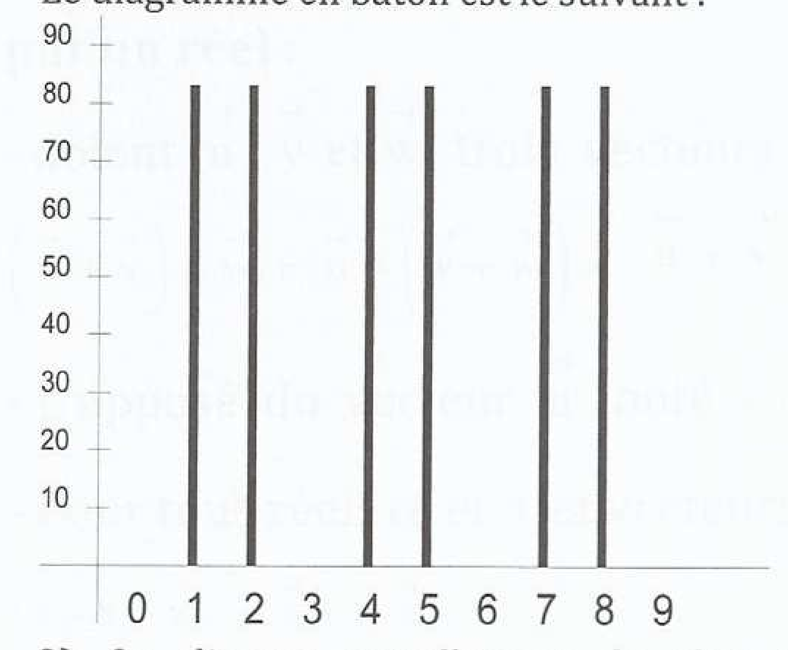
2) a) L'étude pour $\frac{22}{7}$ est très rapide car $\frac{22}{7}=$ 3,142857<u>142857</u> (la période est 142857).

b) Si on veut 498 chiffres après la virgule, la période va donc se répéter 83 fois ($498 \div 6 = 83$).

c) On obtient alors le tableau suivant :

décimale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
effectif	0	83	83	0	83	83	0	83	83	0	**498**
fréquence	0	17	17	0	17	17	0	17	17	0	**100**

Le diagramme en bâton est le suivant :



3) On dispose actuellement de plus de *mille milliards* de décimales de π : tout ces chiffres ont été calculé par des ordinateurs très puissants et des techniques mathématiques extrêmement ingénieuses.

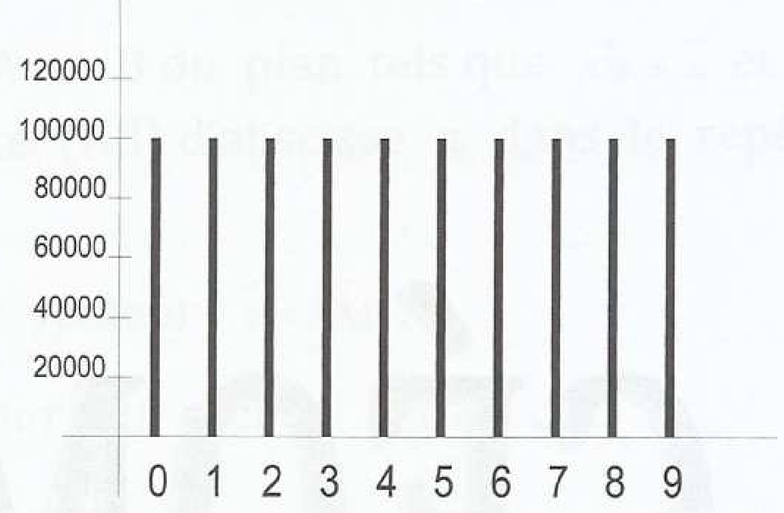
En gros, à raison de 50 lignes de 50 chiffres chacune, cela fait un livre énorme de 400 millions de pages environ ou si vous préférez, un million de livres de 400 pages chacun. Largement de quoi remplir sa bibliothèque !

Personne ne peut directement prendre connaissance de cette énormité. Une étude statistique permet d'en faire une approche.

Pour le premier million de décimales de π, on a les résultats suivants : (source : *le nombre* π de l'Association pour le Développement de la Culture Scientifique) :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
99959	99758	100026	100229	100230	100359	99548	99800	99985	100106

Le diagramme en bâton est le suivant :



La répartition est à peu près équitable ! Il y a à peu près autant de 1 que de 2, que de 3, etc. Chaque chiffre de 0 à 9 est à peu près rencontré 100 000 fois (soit 1 000 000/10), à très peu près.

Les écarts à 100 000 sont d'ailleurs très faibles.

Un autre détail curieux : on a 5 chiffres très légèrement au-dessus de la moyenne (100000) et 5 au-dessous. πest en fait un nombre bien ordinaire...

GÉOMETRIE

Calculs vectoriels

I) Résumé de cours

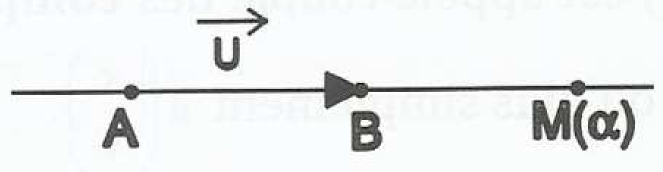
- La relation $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ est appelée **larelationde Chasles** (vraie pour tous points A, B et C).

- Le milieu I d'un segment [AB] est défini par : $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ (ou encore : $\vec{AI} = \vec{IB}$)

- Soient un vecteur non nul $\vec{u}$, deux points A et B du plan tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et un réel α. On désigne par M le point de la droite (AB) d'abscisse α dans le repère (A, B).

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel α est le vecteur $\vec{v} = \vec{AM}$.

On note $\alpha.\vec{u} = \vec{v}$ ou $\alpha.\vec{AB} = \vec{AM}$. Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors pour tout réel α, $\alpha.\vec{0} = \vec{0}$.



Lorsque $\alpha = 0$ on a $M = A$ et $0.\vec{u} = \vec{0}$.

$\left(\textit{Deux vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}\right)$ équivaut à $\left(\text{il existe un réel } \alpha \text{ tel que } \vec{u} = \alpha\vec{v} \text{ ou } \vec{v} = \alpha\vec{u}\right)$

A) Propriétés de l'addition vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un réel :

- Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et α et β deux réels. On a :

$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$; $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

- L'opposé du vecteur $\vec{u}$ noté $-\vec{u}$, vérifie $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$; $(-1).\vec{u} = -\vec{u}$.

- Pour tous réels α et β et vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$(\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$

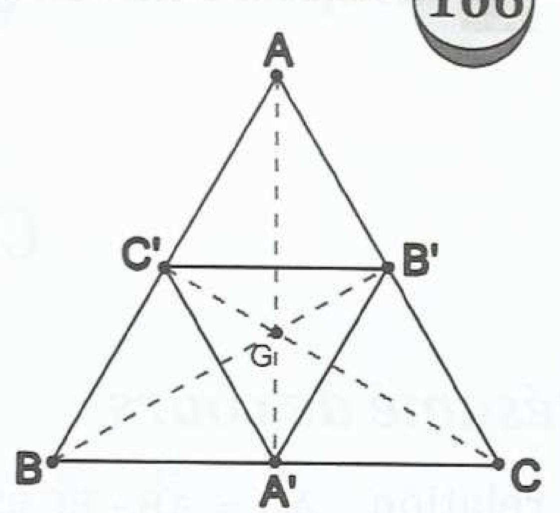
$\alpha\left(\beta\vec{u}\right) = (\alpha.\beta)\vec{u}$

$\alpha\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$

$1.\vec{u} = \vec{u}$

B) Centre de gravité d'un triangle :

Soit ABC un triangle et G un point du plan. Une condition nécessaire et suffisante pour que G soit



le centre de gravité du triangle ABC est :
$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$,

ou bien $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$ où A' est le milieu de $[BC]$.

C) Base de l'ensemble des vecteurs du plan :

* Soient V l'ensemble des vecteurs du plan et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs de V.
Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires on dit que le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ est une **base** B de l'ensemble V.

D) Composantes d'un vecteur dans une base :

* L'ensemble V des vecteurs du plan est muni d'une base $B = (\vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de V, il existe un couple (x, y) de réels et un seul tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Le couple (x, y) est appelé couple des **composantes** du vecteur $\vec{u}$ dans la base B. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$ ou plus simplement $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- **Propriétés :**

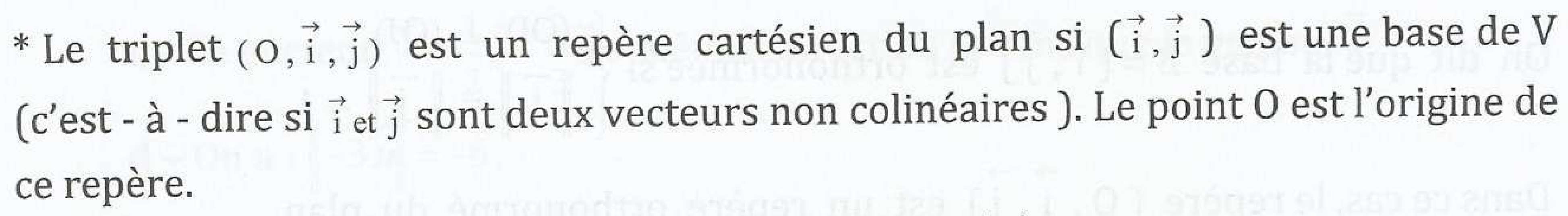
* Soient une base B de V, α un réel et les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_B$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}_B$. On a :

- $\left(\vec{u} = \vec{v}\right)$ équivaut à $(a = a'$ et $b = b')$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}_B$
- Le vecteur $\alpha\vec{u}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}_B$.
- $\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}\right)$ équivaut à $(a b' - b a' = 0)$.

Le réel $(a b' - b a')$ est appelé "déterminant" des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base B.
On note ce déterminant par $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = a b' - b a'$.

E) Repère cartésien du plan :

1) Soient O un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan.



* Le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère cartésien du plan si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de V (c'est - à - dire si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires). Le point O est l'origine de ce repère.

2) Le plan est muni d'un repère cartésien $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

* Pour tout point M du plan il existe un unique couple (x, y) de réels tels que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Le couple (x, y) est appelé couple des coordonnées de M dans le repère R. On note :

$M(x, y)_{(O,\vec{i},\vec{j})}$ et on a : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ équivaut à $M(x, y)_{(O,\vec{i},\vec{j})}$.

3) Soient deux points $M(x_M, y_M)$ et $N(x_N, y_N)$ dans le plan muni d'un repère cartésien $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le vecteur $\vec{MN}$ a pour composantes $(x_N - x_M)$ et $(y_N - y_M)$ dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$. On note $\vec{MN}\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}_B$.

F) Norme d'un vecteur – Vecteurs orthogonaux

1) Soit A un point du plan.

Soient $\vec{u}$ un vecteur de V et M le point tel que $\vec{AM} = \vec{u}$.

La distance AM est appelée la norme du vecteur $\vec{u}$ et on note $\|\vec{u}\| = AM$.

2) Soient un réel α et un vecteur $\vec{u}$ du plan, on a : $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\,\|\vec{u}\|$.

3) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On a $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

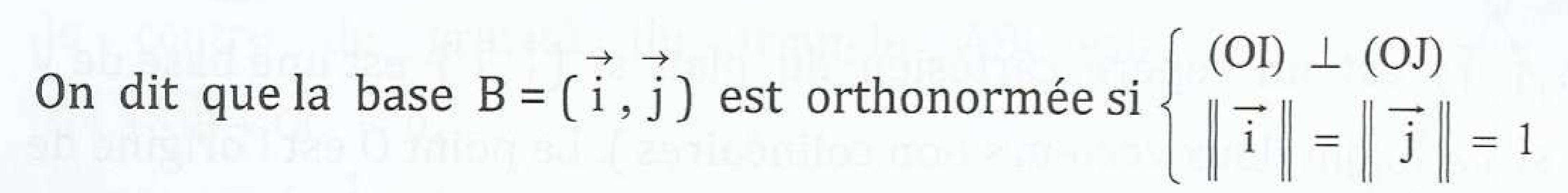
4) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On désigne par O, A et B les points tels que $\vec{OA} = \vec{u}$ et $\vec{OB} = \vec{v}$. Si $(OA) \perp (OB)$ on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

* Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

G) Base orthonormée – Repère orthonormé

1) Soit $B = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de V. Soit O un point du ***plan***.

On désigne par I et J les points définis par $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$.



On dit que la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée si $\begin{cases} (OI) \perp (OJ) \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \end{cases}$

Dans ce cas, le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

2) Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $B = (\vec{i}, \vec{j})$.

* Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_B$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

* Si $M(x_M, y_M)$ et $N(x_N, y_N)$ alors $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$

* Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_B$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}_B$ deux vecteurs. On a :

$\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}\right)$ équivaut à $(a a' + b b' = 0)$.

II) Exercices



1 VRAI-FAUX

1) Répondre, chaque fois, par vrai ou par faux en justifiant la réponse :

a) L'égalité $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ signifie que ABCD est un parallélogramme.

b) Si le triangle ABC est isocèle en A, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

c) Si $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{BA}$.

d) La relation $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ signifie que ABCD est un parallélogramme.

e) Soit ABC un triangle et les points I,J et K vérifiant $5\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB}$, $5\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$; les triangles ABC et IJK ont leurs cotés parallèles deux à deux.

f) Soient E, F et G trois points du plan.
On a $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$.

g) Soit $\vec{u}$ un vecteur **de norme 2.**

2) **a** – Pour construire le vecteur $a.\vec{u}$, avec a>0 ,on construit un vecteur qui a même sens et même direction que $\vec{u}$.

b – Pour construire le vecteur $b.\vec{u}$, avec b<0 ,on construit un vecteur qui a un sens contraire de celui de $\vec{u}$ et qui a pour norme $b.\|\vec{u}\|$.

c – Le vecteur $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{u}$ a mêmes direction et sens que le vecteur $\vec{u}$.

d – On a : $\left\|-3.\vec{u}\right\| = -6$.

e – On a : $-\frac{2}{3}.\left\|-\vec{u}\right\| = -\frac{4}{3}$.



2 APPLIQUER

On considère la figure ci-contre :

1). Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BR}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

2) Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3) En déduire que $\overrightarrow{PQ} = \frac{5}{8}\overrightarrow{PR}$ et interpréter ce résultat.



3 APPLIQUER

Soient A et B deux points distincts du plan.

1) Construire le point C du plan défini par : $3\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (1).

2) Quelle peut-on conjecturer sur les points A,B et C ?

3)Etablir le résultat envisagé en montrant que $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.



4 APPLIQUER

ABCD est parallélogramme de centre O , E est le milieu de [AB], F est le milieu de [CD].Les droites (DE) et (BF) coupent la droite (AC) respectivement en L et M.

a) Pourquoi L est il le centre de gravité du triangle ABD ?

b) Exprimer $\overrightarrow{OL}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$.

c) Prouver que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

d) Montrer alors que O est le milieu de [ML].



5 S'ENTRAINER

Soit A et B deux points fixes du plan. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB}$ lorsque x varie dans l'intervalle [2, 4[.



S'ENTRAINER

Soit un triangle ABC.

a) Construire les points I, J et K tels que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AJ} = -2\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BK} = -2\overrightarrow{BI}$.

b) On pose $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$. Calculer $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) Déduire des résultats précédents que $\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$. Qu'en déduit-on pour le point C ?



S'ENTRAINER

x étant un réel, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x-1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ x-2 \end{pmatrix}$ sont donnés par leurs composantes dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$ de V.

Déterminer le réel x sachant que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



S'ENTRAINER

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points A(0 , 2), B(4 , 0) et C(-1 , 0).

1) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.



S'ENTRAINER

ABC est un triangle.

a) Placer les points D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b) Démontrer que A est le milieu de [ED] .



SEPERFECTIONNER

Soit un triangle ABC.

On considère le point M tel que $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

a) Calculer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Construire M.

b) Soit N le point défini par $\vec{AN} = -\vec{AB} + 2\vec{AC}$. Démontrer que A, M et N sont alignés.



SEPERFECTIONNER

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

A(1,0) ; B(3,2) et C(-2,-1) des points du plan. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

1). Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de V.

2). Soit M le point du plan défini par $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

a) Montrer que ABMC est un parallélogramme.

b) Déterminer le périmètre de ce parallélogramme.



SEPERFECTIONNER

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points suivants :A(2 , 2) ; B(-2, 0) ; C(-2 , 4) et E(-4 , -1).

1) Placer les points A, B, C et E.

2) Calculer les coordonnées de I milieu de [BC]. Le construire.

3) Construire D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et calculer ses coordonnées.

4) Démontrer que I est le milieu du segment [AD].

5) Démontrer que les droites (AE) et (DC) sont parallèles.

6) ABDC est – il un losange ? (Le démontrer)



VRAI-FAUX

a) L'égalité $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$ est fausse, elle est équivalente à
$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$, soit $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$ ou enfin $\overrightarrow{CD}=\vec{O}$ c'est-à-dire les points C et D sont confondus.

b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ sous entend que ces vecteurs ont même direction, ce qui est faux pourvu que ABC est un triangle, d'où l'égalité est fausse.

c) Cette implication est vraie (on prend l'opposé de chaque coté).

d) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$,
d'où 2 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$,
Ainsi $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC})$, d'où l'égalité est vraie

e) $5\overrightarrow{AI}-5\overrightarrow{AJ}=5\overrightarrow{JI}=3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{CB}$ d'où (IJ) // (BC).
$5\overrightarrow{AI}-5\overrightarrow{CK}=5\overrightarrow{KI}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CB}$
$=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{AC}$ d'où (IK)//(AC).
Terminer de même, et montrer que les droites (AB) et (JK) sont parallèle. L'affirmation est alors vraie.

f) Soient E, F et G trois points du plan. On a $\overrightarrow{GE}-\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}=\vec{0}$. Vrai

g) Soit $\vec{u}$ un vecteur **de norme 2**.

2) a – Pour construire le vecteur $a.\vec{u}$, avec a>0 ,on construit un vecteur qui a même sens et même direction que $\vec{u}$. Faux

b – Pour construire le vecteur $b.\vec{u}$, avec b<0 ,on construit un vecteur qui a un sens contraire de celui de $\vec{u}$ et qui a pour norme $b.\|\vec{u}\|$. Faux

c – Le vecteur $\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{2}{3}\vec{u}$ a mêmes direction et sens que le vecteur $\vec{u}$. Faux

d – On a : $\|-3.\vec{u}\|=-6$. Faux

e – On a : $-\frac{2}{3}.\|-\vec{u}\|=-\frac{4}{3}$. Vrai



APPLIQUER

1- $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BR}=\frac{6}{5}\overrightarrow{BC}$

2- $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,

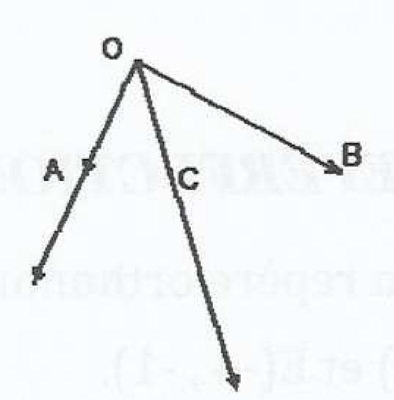
$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-\frac{8}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}\overrightarrow{AC}$.

3- Vérifier alors que $8\overrightarrow{PQ}=5\overrightarrow{PR}$.



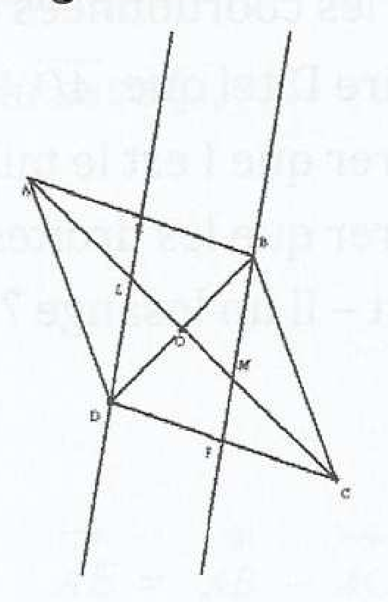
APPLIQUER

3- Utilisons la relation de Chasles et intercalons le point A, on obtient $3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$, qui sont alors colinéaires, d'où les points A, B et C sont alignés.





APPLIQUER



a) Dans le triangle ABD :
[DE] et [AO] sont deux médianes et L est un point commun aux deux droites (DE) et (AO) donc L est le centre de gravité du triangle ABD.

b) $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$.

c) Dans le triangle BCD :
[BF] et [CO] sont deux médianes et M est un point commun aux deux droites (BF) et (CO) donc M est le

centre de gravité du triangle BCD et par suite on a :

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

d) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OL} = \frac{1}{3}\underbrace{\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\right)}_{\vec{0}} = \vec{0} \Rightarrow$ O est le milieu du segment [LM].



S'ENTRAINER

$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ signifie M d'abscisse x dans le repère (A,B)

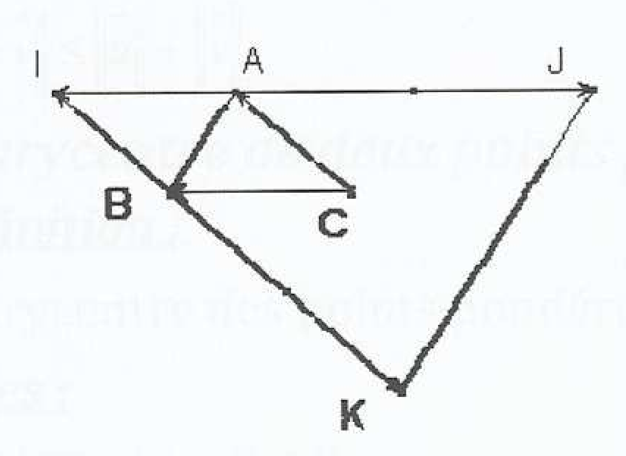
Soient M_1 et M_2 les points de (AB) tels que $\overrightarrow{AM_1}$ = 2 $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_2} = 4\overrightarrow{AB}$.

M décrit alors le segment $[M_1M_2[$.



S'ENTRAINER

a-



b- On a : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB}$ donc AIBC est un parallélogramme, d'où $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{u} + \vec{v}$

$\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AJ} = \vec{u} - 2\vec{v}$;

$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK} = -2\vec{u} + \vec{v}$

c- On vérifie, alors, que $\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$ donc C représente le centre de gravité du triangle IJK.



S'ENTRAINER

On applique la propriété :

$\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}\right)$

On a : $(x-1)(x-2) - 2 = 0$ équivaut à $x^2 - 3x = 0$ équivaut à $x(x-3) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 3$.



S'ENTRAINER

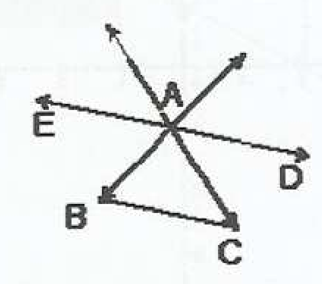
1) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

2) On a $(-1)\times4 + (-2)\times(-2) = 0$ donc les deux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux et par conséquent le triangle ABC est rectangle en A.



S'ENTRAINER

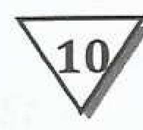
1 -



2-

$\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{O}$ donc A est le milieu de $[ED]$.



SE PERFECTIONNER

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AN}$ d'où A, M et N sont alignés



SE PERFECTIONNER

1) On a $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et on voit qu'ils ne sont pas colinéaires (car $2\times(-1) - 2\times(-3) = 4$ non nul)

Par conséquent $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est une base de l'ensemble V des vecteurs du plan.

2) a) On a $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ d'où $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ c'est-à-dire M(0, 1).

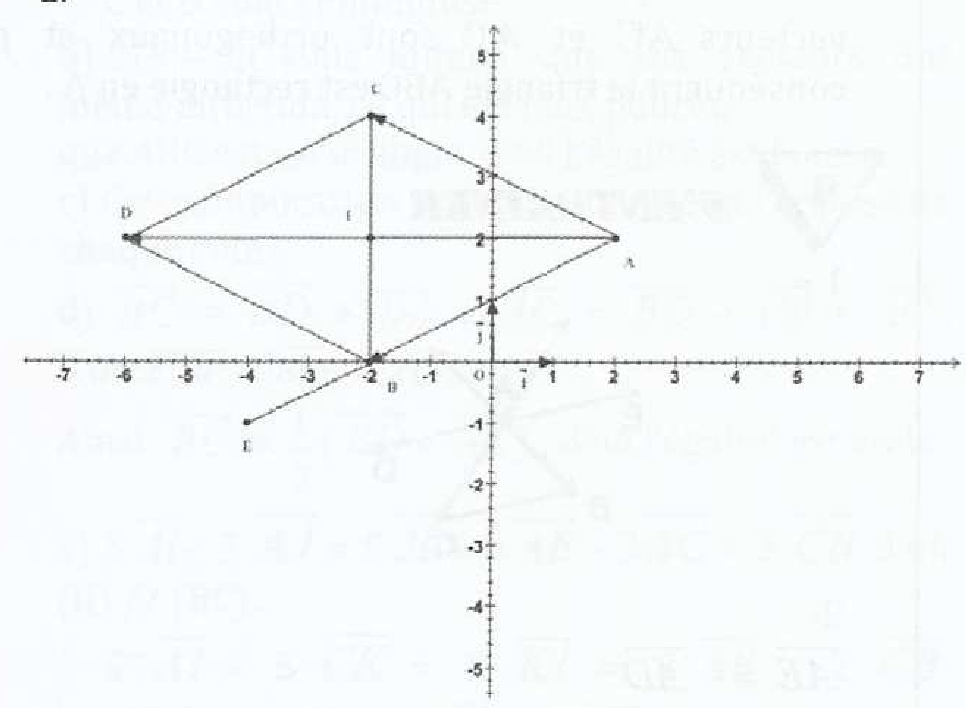
$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}$ donc ABMC est un parallélogramme.

b) On a AB = $2\sqrt{2}$ = CM et AC = $\sqrt{10}$ = BM donc le périmètre du parallélogramme ABMC est égale à $4\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$.



12 SE PERFECTIONNER

1.



2. I est le milieu de [BC]

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-2-2}{2} = -2 \\ y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow I(-2,2)$.

3. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme.

Soit $D(x,y)$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=-8 \\ y-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}.$$

D'où $D(-6,2)$.

4. ABDC est un parallélogramme $\Leftrightarrow [AD]$ et $[BC]$ ont même milieu $\Rightarrow$ I est le milieu de $[AD]$.

5. $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{dét}\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DC}\right) = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires

$\Rightarrow$ (AE) // (DC).

6. ABDC est un parallélogramme

De plus

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

et $AC = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ ABDC est un losange.

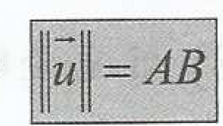
Barycentre

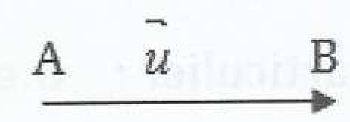
I) Résumé de cours

A) Norme d'un vecteur

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur et $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$.

La norme de vecteur $\vec{u}$ est le réel positif définie par  $\|\vec{u}\| = AB$



Propriétés :

- $\|\vec{0}\| = 0$
- $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$
- $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|.\|\vec{u}\|$ avec $\alpha \in IR$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

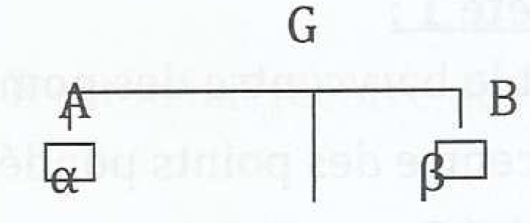
B) Barycentre de deux points pondérés:

1) Définition :

G est le barycentre des points pondérés (A ,α) et (B,β) signifie $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Remarques :

- G existe si α +β ≠ 0
- **On a : G , A et B sont alignés**
- Si α = β alors G = A*B
- $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ (construction de G)



G et le point d'équilibre des points A et B affectés des masses α et β

2) Propriétés :

Propriété 1 :

Si et k ∈ IR* alors G est le barycentre des points pondérés (A , kα) (B, kβ).

Propriété 2 :

Si α +β ≠ 0 alors pour tout point M du plan on a : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$ avec G est le barycentre des points pondérés (A ,α) et (B,β)

Exemple :

$2\overrightarrow{MK}-5\overrightarrow{MN}=(2+(-5))\overrightarrow{MG}$ avec G est le barycentre des points pondérés (K ,2) et (N, -5)

Remarque :

On a G est le barycentre des points pondérés (A ,α) (B,β) signifie $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

D'où G est le point d'abscisse $x_G=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$)

En particulier : G $\in$[AB) si $x_G \geq 0$

G $\in$[AB] si $0 \leq x_G \leq 1$ (G$\in$[AB] si α et β sont de même signe)

C) Barycentre de trois points pondérés:

1) Définition :

G est le barycentre des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ) signifie $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Remarques :

- G existe si α +β+γ ≠ 0
- Si α = β =γ alors G est le centre de gravité du triangle ABC
- $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ (construction de G)

2) Propriétés :

Propriété 1 :

Si G est le barycentre des points pondérés (A,α) ,(B,β) et (C,γ) et k $\in$IR* alors G est le barycentre des points pondérés (A , kα) (B, kβ).(C,kγ)

Propriété 2 :

Si α +β+γ ≠ 0 alors pour tout point M du plan on a :

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\delta)\overrightarrow{MG}$

avec G est le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β) et (C,γ)

Exemple :

$2\overrightarrow{MK}-5\overrightarrow{MN}+7\overrightarrow{MH}=(2+(-5)+7)\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MG}$ avec G est le barycentre des points pondérés (K ,2), (N, -5) et (H, 7)

D) Exemples d'ensembles de points :

A et B deux points donnés

- MA = MB signifie M appartient à la médiatrice de [AB].
- MA = 2 signifie M appartient au cercle C (A , 2)

- MA =AB signifie M appartient au cercle C (A, AB).
- AM ≤ 2 signifie M appartient au disque fermé de centre A et de rayon 2
- AM < 2 signifie M appartient au disque ouvert de centre A et de rayon 2
- $2 \leq AM \leq 3$ signifie M appartient a la couronne limitée par C (A ,2) et C'(A , 3)
- $MA^2 + MB^2 = AB^2$ signifie M appartient au cercle C de diamètre $[AB]$
- MA + MB =AB signifie M appartient au segment $[AB]$.

II) Exercices



1 Q-C-M

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) Soit x un réel, le barycentre G des points pondérés (A,x) (B,x-1) existe si :

a) $x \neq 1$ b) $x \neq 0$ c) $x \neq \frac{1}{2}$

2) Si $\overrightarrow{BA} = 5\overrightarrow{BC}$ alors A est le barycentre des points pondérés

a) (B,1) ; (C,5) b) (B,- 4) ; (C,5) c) (B,4) ; (C,5)

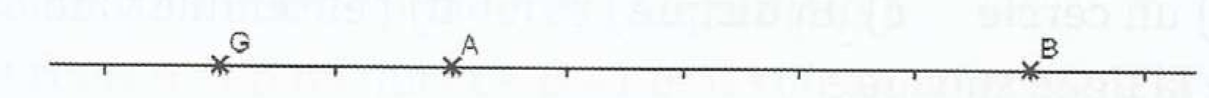
3) Soit A,B et G trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$. On a G est le barycentre des points pondérés

a)(A, - 2) ; (B,1) b) (A,1) ; (B,2) c) (A,2) ; (B,1)

4) Soit A,B et G trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$. On a B est le barycentre des points pondérés

a)(A, 1) ; (G,3) b) (A,3) ; (G,1) c) (A,1) ; (G,-3)

5)



On a G est le barycentre des points pondérés

a)(A, 2) ; (B,5) b) (A,5) ; (B,5) c) (A,7) ; (B,-2)

6) Si G est le barycentre des points pondérés (A, 6) ; (B,-12)
Alors G est le barycentre des points pondérés

a) (A, 2) ; (B,4) b) (A,4) (B, -8) c) (A,12) (B, -32)

7) Si G est le barycentre des points pondérés (A, x) ; (B,2) avec x > - 2 alors

a) $G \in [AB)$ b) $G \in [BA)$ c) $G \in [AB]$

8) Si G est le barycentre des points pondérés (A, x) ; (B, x-1) on a: $G\in[AB]$ si :

a) x >0 b) x < 1 c) $x\in[0,1]$ d) $x\in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$

9) Soient A et B deux points distincts du plan et $E=\left\{M\in P \text{ tel que } \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|\right\}$.

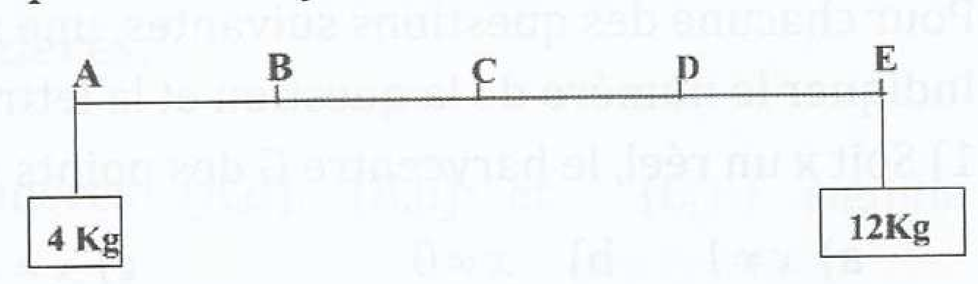
L'image E' par une translation de l'ensemble E est :

a) Une droite b) un cercle c) un disque d) l'ensemble vide

10) Soit ABCun triangle et I le milieu de [AB] du plan et L'ensemble $E=\left\{M\in P \text{ tel que } \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AJ}\right\|\right\}$ est :

a)Une droite b) un cercle c) un disque d) l'ensemble vide

11) On considère le levier ci contre



Le point d'équilibre du levier est : a) B b)Cc) D



2 Q-C-M

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) Le barycentre G des points pondérés $(A,m^2)(B,-6m),(C,5)$ existe si

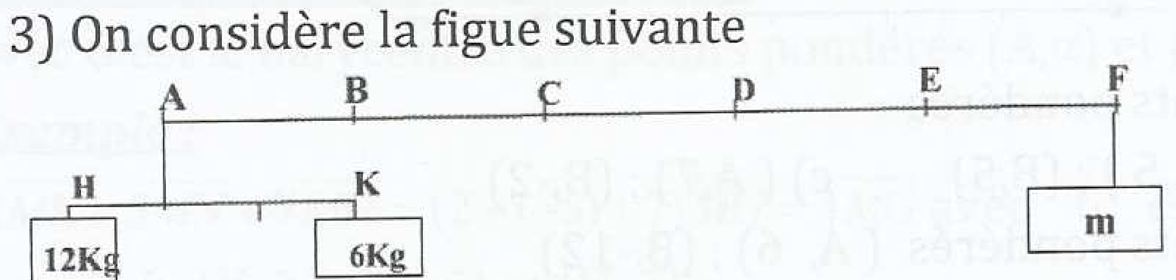
a) $m\in]-\infty,1[\cup]5,+\infty[$ b) $m\in[1,5]$ c) $m\in IR\setminus\{1,5\}$ d) $m\in IR\setminus\{-1,-5\}$

2) Soit ABC un triangle

L'ensemble des points M du plan tel que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|$ est :

a)Une droite b) un cercle c) un disque d) l'ensemble vide

3) On considère la figue suivante



Pour que le point d'équilibre du levier représenté par le segment [AF] soit le point B il faut que :

a) m = 18 Kg b) m = 6Kg c) m = 4,5 Kg d) m =8 Kg



3 APPLIQUER

Soit A et B deux points construire le barycentre G des points pondérés (A,2) et (B,3)



4 APPLIQUER

1) Pour quelles valeurs de m le barycentre G des points pondérés (A, m+1),(B,m+3) existe-t- il ?

2) Pour quelles valeurs de m on a $G \in [AB]$

3) Soit C le point tel que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ pour quelles valeurs de m on a $G \in [BC)$.



5 APPLIQUER

Transformer les écritures suivantes en un seul vecteur :

1) $2\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}$ 2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ 3) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$



6 APPLIQUER

Soient ABC un triangle et I le barycentre des points pondérés (A , 1) (B , 3)

Soit G le point tel que $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et

Montrer que G est le barycentre des points pondérés I et C affectés des coefficients que l'on précisera.



7 APPLIQUER

Soient ABCD un parallélogramme de centre O et I le barycentre des points pondérés (A, 1) (C, 3). Soit G le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ Montrer que les points I,G et O sont alignés.



8 APPLIQUER

Soit G le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,3).

Déterminer les réels α et β tel que $\alpha + \beta = 1$ et G soit le barycentre de (A,α) et (B,β).



9 APPLIQUER

Soit ABCD un quadrilatère. Déterminer et construire les ensembles suivants :

$E_0 = \{M \in P$ tel que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}\|\}$

$E_1 : \{M \in P$ tel que $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\|\}$

$E_3 = \{M \in P$ tel que $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| \leq 3\}$



APPLIQUER

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. On considère les points :

L barycentre de (A,1) et (C,3) ; N isobarycentre de B et C ; M tel que : $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$

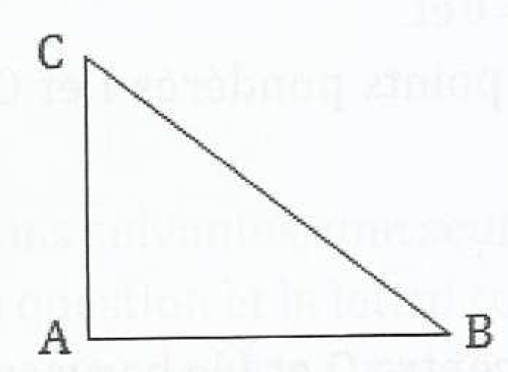
1) Placer les points L et N
2) Montrer que M est le barycentre des points A et B pondérés par des coefficients α *et* β que l'on précisera et construire le point M.
3) On considère maintenant le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ On pose AB=1

   a) Quelle est la nature de ce repère.

   b) Déterminer les coordonnées de L,M et N dans ce repère et montrer que L, M et N sont alignés.
4) Déterminer les ensembles :

$\Gamma=\left\{M\in P;\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}\right\|=2\right\}$

$\Gamma'=\left\{M\in P;\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}\right\|\leq 2 \text{ et } \left\|\overrightarrow{AM}\right\|+\left\|\overrightarrow{MC}\right\|=1\right\}$





APPLIQUER

Soit ABC un triangle .O=A*B

E le barycentre des points pondérés (B,3) ;(C,2)

1) Construire E
2) Soit I le point tel que $3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Montre que (AE) et (OC) sont sécantes en I



APPLIQUER

L'unité étant le cm on donne un triangle ABC tel que AB= 5 ,AC=3 , BC=6 et I = A*B

1) a) Construire le point J barycentre des points pondérés (A,3) et (B,2)

b) Construire le point K est le barycentre des points pondérés (B,2) et (C, 3)

2) Montrer que I est le barycentre des points pondérés (A,1) et (J, - 5).

3) Soit l'ensemble E = { M, M∈P et $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=5\left\|\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}\right\|$ }

a) Montrer que $A\notin E$.

b) Déterminer et construire l'ensemble E.

4) Déterminer et construire l'ensemble :

F={ M, M∈P et $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|^2+\left\|2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|^2=25JK^2$ }



13 APPLIQUER

ABC un triangle A'= B*C B'=A*C C'=A*B

Soit M le barycentre des points pondérés (A,2) (B,1)et G les points définies par : $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

1) Montrer que G =A*A' et faire une figure.

2) Montrer que G =B'*C'.

3) Montrer que G est le barycentre des points pondérés (M, 3) et (C , 1).

4) En déduire que (AA') (B'C') et (CM) sont concourantes.



14 APPLIQUER

Soit A, B et C trois points construire le barycentre G des points pondérés (A,2) , (B,3) et (C ,1)



15 APPLIQUER

Simplifier en un seul vecteur

1) $2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}-5\overrightarrow{KC}$ 2) $2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}+4\overrightarrow{KC}$



16 S'ENTRAINER

L'unité de longueur étant le cm, on considère le triangle ABC vérifiant : AB = 8, BC = 5 et CA = 4

On considère le point R barycentre de (A ; 3) et (C ; 1) et le point Q barycentre de (A ;3) et (B ;1)

1) a) Construire les points Q et R.

b) Soit G le point défini par $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Montrer que les droites (BR) et (CQ) sont sécantes en G

2) Soit I le milieu de $[BC]$ .Montrer que les points A,G et I sont alignés.

3) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$$E=\left\{M\in P \text{ tels que } \left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|\right\}$$

$$F=\left\{M\in P \text{ tels que } \left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|\right\}$$



17 S'ENTRAINER

Soit ABC un triangle et G le barycentre des points pondérés (A,m^2-2) et $(B,3m-2)$ avec m un paramètre réel

1) a) Pour quelles valeurs de m le barycentre G existe ?

   b) Pour quelles valeurs de m le point $G\in[AB)$?

2) On suppose dans toute la suite que **m =2.**

   a) Construire le point G sur la figure (1)

   b) Soit K le barycentre des points pondérés (A,1) , (B,2) et (C,3) , montrer que le point K est le milieu du segment $[GC]$.

3) On donne les ensembles suivants :

$$C_1=\left\{M\in P/\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=3\left\|2\overrightarrow{MK}-2\overrightarrow{MB}\right\|\right\}$$

$$C_2=\left\{M\in P/\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MG}\right\|\right\}$$

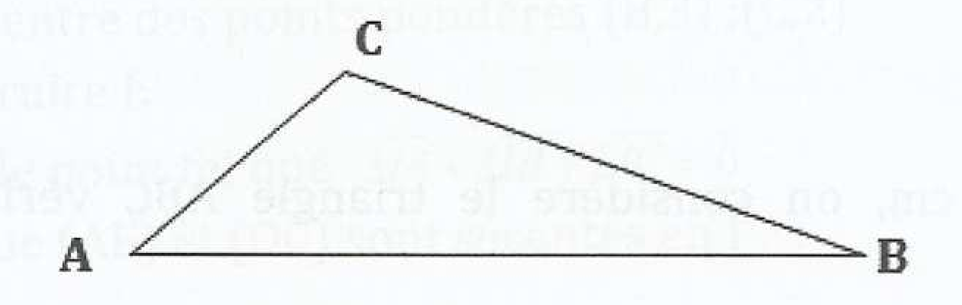
   a) Déterminer et construire sur la figure 1 chacun de ces ensembles C_1 et C_2

   b) En déduire l'ensemble Γ :

$$\Gamma=\left\{M\in P/3\left\|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MG}\right\|\leq\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|\leq 3\left\|2\overrightarrow{MK}-2\overrightarrow{MB}\right\|\right\}$$

   Hachurer sur la figure (1) l'ensemble Γ

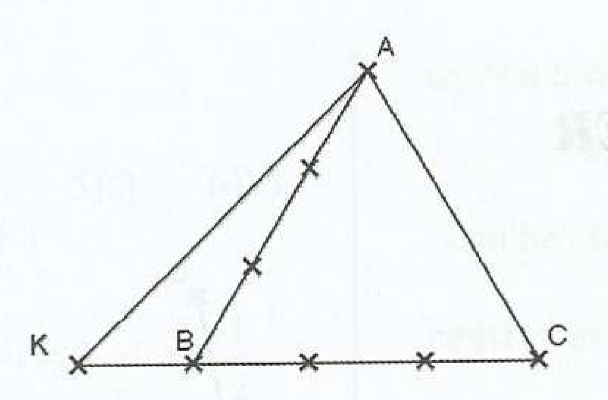
Figure 1





18 SEPERFECTIONNER

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle et les divisions sur les cotés sont régulières



1) a) Ecrire B comme barycentre de K et C

b) Ecrire G comme barycentre de A et B

c) Montrer alors que *G est barycetre* des points pondérés $(A,8),(K,3),(C,1)$

2) Soit $I = bary\{(A,8),(K,3)\}$

a) Montrer que I,G et C sont alignés

b) Construire alors le point I

3) a) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$\|8\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MC}\| = \|12\overrightarrow{MA}-12\overrightarrow{MG}\|$

b) Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que :

$8\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MC}$ est orthogonal à $8\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MK}$

4) La droite (KG) coupe (AC) en J

Ecrire J comme barycentre de A et C



19 SEPERFECTIONNER

Soit ABCD un parallélogramme, on définit les points P et Q par :

- $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
- Q le symétrique du milieu de $[AD]$ par rapport à A

1) Faire une figure

2) a) Démontrer que P est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1)

b) Exprimer Q comme barycentre des points (A, a) et (D,b) où a et b des réels que l'on déterminera.

3) a) Justifier que C est le barycentre des points pondérés (A,1) , $(B,-1)$ et $(D,-1)$

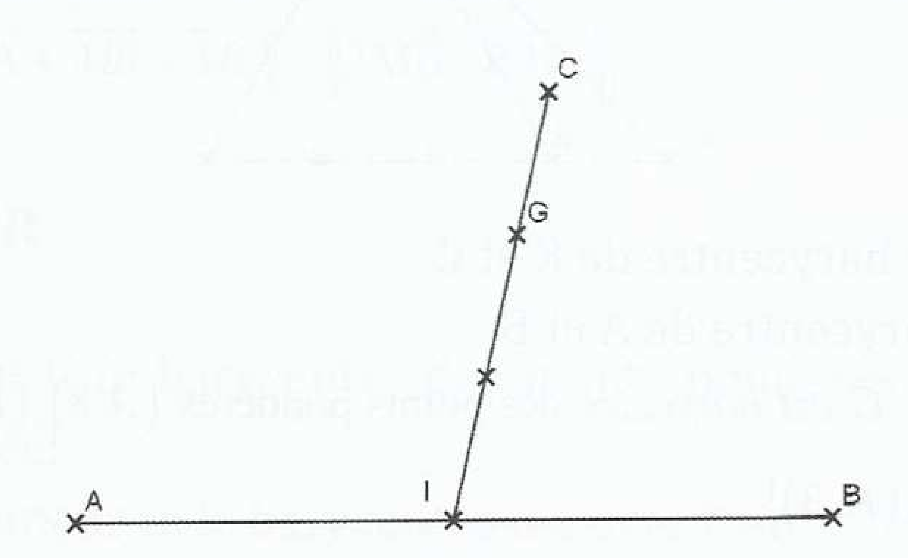
b) Compléter : $2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB} = \ldots$

$3\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD} = \ldots$

c) En déduire que les points C,P et Q sont alignés



SEPERFECTIONNER



1) Ecrire G comme barycentre des points I et C
2) En déduire que G est le barycentre des points pondérés (A,1) (B,1) et (C,4)
3) a) Ecrire A comme barycentre des points I et B
   b) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$$E = \left\{ M \in P \text{ tel que } \left\| 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MI} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| \right\}$$

$$F = \left\{ M \in P \text{ tel que } \frac{\left\| 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \right\|}{\left\| \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MI} \right\|} = \frac{2\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right\|}{\left\| \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MI} \right\|} \right\}$$

1 Q-C-M

1)c) 2)b) 3)b) 4)c) 5)c) 6)b)
7)a) 8)d) 9)b) 10)b) 11)c)

En effet :

1) G existe si $x+(x-1)\neq 0$ si $2x-1\neq 0$ si $x\neq \frac{1}{2}$

2) Si $\overrightarrow{BA}=5\overrightarrow{BC}$ alors $\overrightarrow{BA}=5\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$
alors $4\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ alors $-4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
alors A est le barycentre des points pondérés (B,-4) ; (C,5)

3) On a : $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ alors $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ alors G est le barycentre des points pondérés
(A,1) ; (B,2)

4) On $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ alors B est le barycentre des points pondérés (A,1) ; (G,-3)

5)

On a $\overrightarrow{GB}=\frac{7}{2}\overrightarrow{GA}$ alors $2\overrightarrow{GB}=7\overrightarrow{GA}$ alors
$7\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
Alors G est le barycentre des points pondérés (A,7) ; (B,-2)

6) Si G est le barycentre des points pondérés (A, 6) ; (B,-12)
Alors G est le barycentre des points pondérés (A, $6\times\frac{2}{3}$) ; (B, $-12\times\frac{2}{3}$)
Alors G est le barycentre des points pondérés (A,4) (B, -8)

7) Si G est le barycentre des points pondérés(A, x) ; (B,2) alors $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{2+x}\overrightarrow{AB}$

On a si x > - 2 alors $\frac{2}{2+x}>0$ alors $G\in[AB]$

8) On a : $G\in[AB]$ si $\alpha\beta\geq 0$ si x(x-1) ≥0

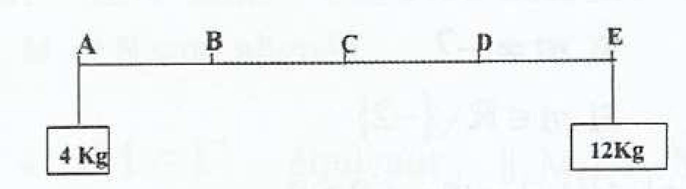
x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	−	0	+		+
$x-1$	−		−	0	+
$x(x-1)$	+		−		+

D'où $G\in[AB]$ si $x\in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$

9) $M\in E$ signifie $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|$
signifie $\|2\overrightarrow{MI}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}\|$ signifie 2MI=BA
signifie $IM=\frac{AB}{2}$ signifie M appartient au cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$.

10) Soit ABCun triangle et I le milieu de [AB] du plan et L'ensemble
$E=\left\{M\in P \text{ tel que } \|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AJ}\|\right\}$ est :
$M\in E$ signifie $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AJ}\|$
signifie $\|2\overrightarrow{MI}\|=\|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AJ}\|$
signifie $\|2\overrightarrow{MI}\|=\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}\|$
signifie 2MI=BJ signifie MI=$\frac{BJ}{2}$
signifie M appartient au cercle de centre I et de rayon $\frac{BJ}{2}$.

11)



Soit G le point d'équilibre du levier
On a G est le barycentre des points pondérés (A,4) (E,12)
Alors $\overrightarrow{AG}=\frac{12}{16}\overrightarrow{AE}$ alors $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ alors $G=D$



2 Q-C-M

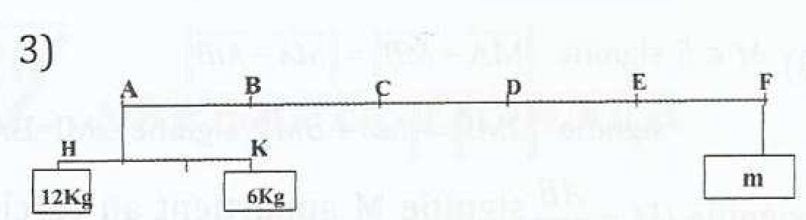
1) c) 2)b) 3)c)

En effet

1) Le barycentre G des points pondérés $(A,m^2)(B,-6m),(C,5)$ existe si $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$
Si $m^2-6m+5\neq 0$ si $m\neq 1$ et $m\neq 5$ si $m\in IR\setminus\{1,5\}$

2) $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\|$
signifie $\|4\overrightarrow{MG}\|=4\|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}\|$ avec G est le barycentre (A,1) (B,1),(C,2)
signifie $4MG=4BA$
signifie $MG=BA$
Signifie M appartient au cercle de centre G et de rayon AB

3)



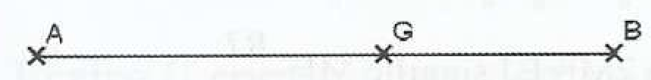
Pour que le point d'équilibre du levier représenté par le segment [AF] soit le point B il faut que : $(12+6)AB = mBF$ alors $18AB = m \times 4AB$

alors m = 4,5Kg



3 APPLIQUER

G est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,3) signifie $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{2+3}\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$



4 APPLIQUER

1/G existe si $(m+1)+(m+3) \neq 0$

Si $2m+4 \neq 0$

Si $m \neq -2$

Si $m \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

2/ $G \in [AB]$ signifie $\alpha\beta \geq 0$

signifie $(m+1)(m+3) \geq 0$

m	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$m+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$m+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(m+1)(m+3)$			0	$-$	0	$+$	

D'où $G \in [AB]$ signifie $m \in]-\infty,-3] \cup [-1,+\infty[$



5 APPLIQUER

1/ $2\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} = (2+(-5))\overrightarrow{MG} = -3\overrightarrow{MG}$ avec G est le barycentre de (A,2) (B,-5)

2/ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (1+1)\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MI}$ avec $I = A * B$

3/ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA}$



6 APPLIQUER

Montrons que $\alpha\overrightarrow{GI} + \beta\overrightarrow{GC} = \vec{0}$?

On a : $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Signifie $(1+3)\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ car G est le barycentre de $(A,1),(B,3)$

Signifie $4\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Signifie G est le barycentre de $(I,4)(C,1)$



7 APPLIQUER

On a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 0$

Alors $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Alors $(1+3)\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$ car I est le barycentre de $(A,1)(C,3)$

O est le milieu de $[BD]$

Alors $4\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$

Alors $2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GO} = \vec{0}$

Alors G est le barycentre de $(I,2)(O,1)$ alors G, I et O sont alignés.

8 APPLIQUER

On a G le barycentre de $(A,2)(B,3)$

Alors G est le barycentre de $(A,2k)$ et $(B,3k)$, $k \in \mathbb{R}^*$

Si $(2k)+(3k)=1$ alors $5k=1$ alors $k=\dfrac{1}{5}$

D'où G est le barycentre de $\left(A,\dfrac{2}{5}\right)\left(B,\dfrac{3}{5}\right)$

9 APPLIQUER

- $M \in E_0$ signifie $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}\|$

Signifie $\|2\overrightarrow{MI}\| = \|(2-4)\overrightarrow{MG}\|$ avec $I = A * B$

Signifie $\|2\overrightarrow{MI}\| = 2MG$

G barycentre de $(A,2)(B,-4)$

Signifie $MI = MG$

Signifie M appartient à Δ la médiatrice de $[IG]$

Conclusion : $E_0 = \Delta$



• $M \in E_1$ signifie $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right\|$

Signifie $\left\|\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|(3+1)\overrightarrow{MG'}\right\|$

avec G' est le barycentre.

Signifie $\left\|\overrightarrow{CA}\right\| = \left\|4\overrightarrow{MG'}\right\|$ de $(A,3)(D,1)$

Signifie $CA = 4MG'$

Signifie $MG' = \dfrac{CA}{4}$

Signifie $M \in \mathscr{C}\left(G', \dfrac{CA}{4}\right)$

D'où $E_1 = \mathscr{C}\left(G', \dfrac{CA}{4}\right)$

• $M \in E_3$ signifie $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| \leq 3$

Signifie $\left\|(2+1)\overrightarrow{MG''}\right\| \leq 3$

avec G'' est le barycentre de $(A,2)(B,1)$

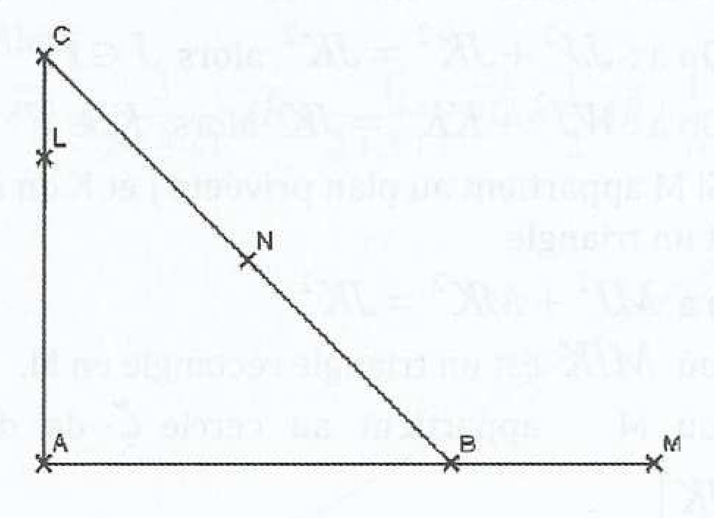
Signifie $3MG'' \leq 3$

Signifie $MG'' \leq 3$

Signifie M appartient au disque fermé D de centre G'' est de rayon 3.



10 APPLIQUER



1) L est le barycentre de (A,1) (C,3) alors $\overrightarrow{AL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$N = B * C$

2)

$\overrightarrow{MB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{MA}$

équivaut $3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}$

équivaut $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Alors M est le barycentre de (A,1) (B,-3)

Alors $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

3) a) * On a $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

* On a $AB = AC = 1$

Alors R est un repère orthonormé

b) On a

$\overrightarrow{AL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ alors $L\left(0, \dfrac{3}{4}\right)$

On a $O' = h(O)$

alors $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ alors $M\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

On a : $N = B * C$ et $B(1,0)$, $C(0,1)$

alors $N\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

on a : $\overrightarrow{LM}\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{4}\right)$, $\overrightarrow{LN}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$

$\overrightarrow{LM} = 3\overrightarrow{LN}$ alors $\overrightarrow{LM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{LN}$ alors L , M et N sont alignés.

4) * $M \in \Gamma$ équivaut $\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = 2$

équivaut $\left\|4\overrightarrow{ML}\right\| = 2$

équivaut $4ML = 2$

équivaut $ML = \dfrac{1}{2}$

équivaut $M \in \zeta\left(L, \dfrac{1}{2}\right)$ d'où $\Gamma = \zeta\left(L, \dfrac{1}{2}\right)$

* $M \in \Gamma'$

équivaut $\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\right\| \leq 2$ et $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| + \left\|\overrightarrow{MC}\right\| = 1$

équivaut $4ML \leq 2$ et $AM + MC = 1$

équivaut $ML \leq \dfrac{1}{2}$ et $AM + MC = AC$

équivaut M appartient au disque fermé D de centre L et de rayon $\dfrac{1}{2}$ et $M \in [AC]$

D'où $\Gamma' = D \cap [AC]$

D'où $\Gamma' = [KC]$

avec K est le point tel que $K \in [AC]$ et $AK = \dfrac{1}{4}AC$



11 APPLIQUER

1) E est le barycentre de (B ,3) (C,2) alors $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

2) * On a $3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Alors $3\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Alors $3\times 2\overrightarrow{IO}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Alors $3\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Alors I est la barycentre de (O,3) et (C,1)

alors $\boxed{I\in(OC)}$

* On a : $3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Alors $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IE}=\vec{0}$ alors I est la barycentre de (A,3) (E,5)

Alors $\boxed{I\in(EA)}$

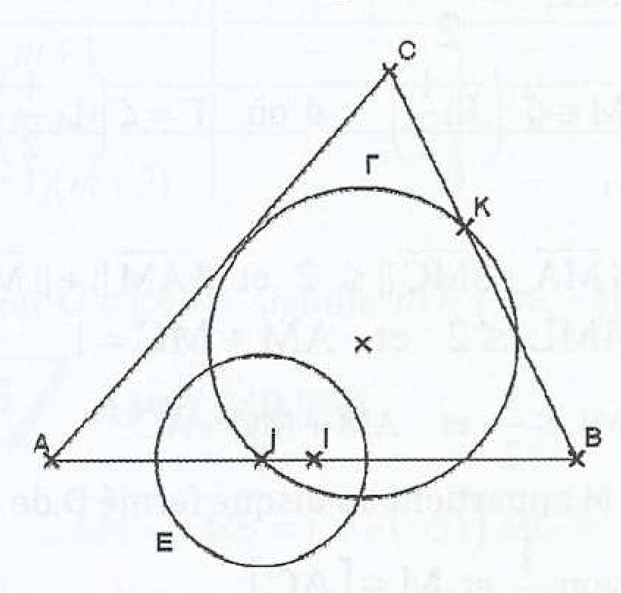
alors $I\in(OC)\cap(EA)$



12 APPLIQUER

1) a) J est le barycentre des points pondérés (A,3) (B,2) alors $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

b) K est le barycentre des points pondérés (B,2) et (C,3) alors $\overrightarrow{BK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$



2) Montrons que $\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{IJ}=\vec{0}$

On a :

$\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}-5\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}\right)=-4\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AJ}$

$=-4\overrightarrow{IA}-5\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=-4\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{AB}$

$=-2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BA}$

$=\vec{0}$

D'où I est le barycentre des points pondérés (A,1) (J,-5)

3/ a) on a $\left\|3\overrightarrow{AA}+2\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|2\overrightarrow{AB}\right\|=2AB+10$

$5\left\|\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}\right\|=5\left\|2\overrightarrow{JI}\right\|=10JI=5$ car $I=A*B$

Alors $\left\|3\overrightarrow{AA}+2\overrightarrow{AB}\right\|=5\left\|\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}\right\|$ alors $A\notin E$

b) $M\in E\Leftrightarrow\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=5\left\|\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}\right\|$

$\Leftrightarrow\left\|(3+2)\overrightarrow{MJ}\right\|=5$

car J est le barycentre des points pondérés (A,3) (B,2)

$\Leftrightarrow 5MJ=5$

$\Leftrightarrow MJ=1$

$\Leftrightarrow M\in\zeta_{(J,1)}$

Conclusion $E=\zeta_{(J,1)}$

4) $M\in F$

$\Leftrightarrow\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|^2+\left\|2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|^2=25JK^2$

$\Leftrightarrow 5\left\|\overrightarrow{MJ}\right\|^2+\left\|5\overrightarrow{MK}\right\|^2=25JK^2$

$\Leftrightarrow 25MJ^2+25MK^2=25JK^2$

$\Leftrightarrow MJ^2+MK^2=JK^2$

• On a : $JJ^2+JK^2=JK^2$ alors $J\in F$

• On a : $WJ^2+KK^2=JK^2$ alors $K\in F$

• Si M appartient au plan privéete J et K on a MJK est un triangle

On a $MJ^2+MK^2=JK^2$

D'où MJK est un triangle rectangle en M.

D'où M appartient au cercle ζ de diamètre $[JK]$

Conclusion $M=\zeta_{[JK]}$



13 APPLIQUER

$A'=B*C$, $B'=A*C$, $C'=A*B$

1) on a: $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Alors $2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA'}=\vec{0}$ car $A'=B*C$

Alors $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA'}=\vec{0}$

Alors $G=A*A'$

2) on : $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Alors $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Alors $2\overrightarrow{GC'}+2\overrightarrow{GB'}=\vec{0}$

Alors $\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{GB'}=\vec{0}$

Alors $G=C'*B'$

3) on a : $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Alors $(2+1)\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ car M est le barycentre des points pondérés $(A,2)(B,1)$

Alors $3\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Alors G est le barycentre des points (M,3) (C,1)

3) * on a $G=A*A'$ alors $G\in(AA')$

- On $G=B'*C'$ alors $G\in(B'C')$
- On a G est le barycentre des points pondères $(M,3)$ et $(C,1)$ Alors $G\in(MC)$

D'où les droites (AA'), $(B'C')$ et (MC) sont concourantes en G.

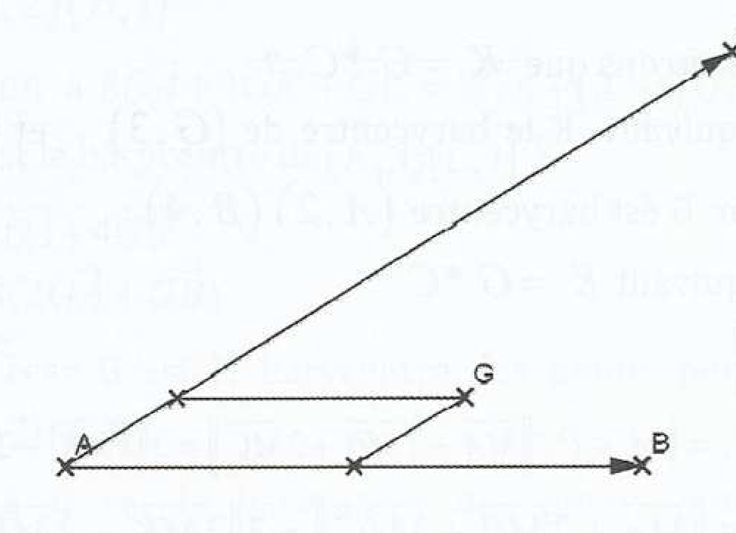


14 APPLIQUER

G est le barycentre des points pondères $(A,2)$,$(B,3)$ et $(C,1)$

Alors

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2+3+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2+3+1}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$



2ème méthode :

*G est le barycentre de $(A,2)$ $(C,1)$

On a G est le barycentre de $\underbrace{(A,2),(C,1)}$,$(B,3)$

Alors G est le barycentre $(G',3),(B,3)$ avec G' est le barycentre de $(A,2)$ $(C,1)$

Alors $G=G'*B$

Construire : On construit G' le barycentre $(A,2)$ $(C,1)$ de puis le point G.

15 S'ENTRAINER

1) $2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}-5\overrightarrow{KC}=(2+3)\overrightarrow{KG}-5\overrightarrow{KC}$

$=5(\overrightarrow{KG}-\overrightarrow{KC})=5(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KG})=5\overrightarrow{CG}$

Avec G est le barycentre des points pondérés $(A,2),(B,3)$.

2/ $2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}+4\overrightarrow{KC}=(2+3+4)\overrightarrow{KG'}$ avec G' est le barycentre des points pondérés $(A,2)(B,3)(C,4)$

3/ $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}=(2+3+5)\overrightarrow{MG''}=4\overrightarrow{MG''}$

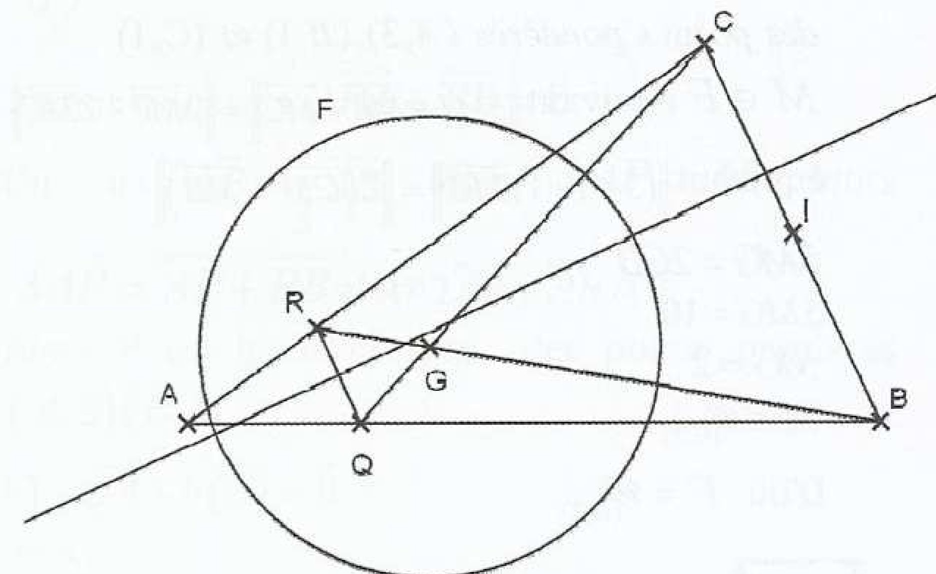
avec G'' est le barycentre $(A,2),(B,-3)$.

16 S'ENTRAINER

R est le barycentre de $(A,3)$ et $(C,1)$

Q est le barycentre $(A,3)$ $(B,1)$

1)a) $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$



b)* On a $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

alors $(3+1)\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

alors $4\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

alors G est le barycentre des ponts pondérés $(Q,4)(C,1)$

alors $\boxed{G\in(QC)}$

*On a $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Alors $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Alors $(3+1)\overrightarrow{GR}+\overrightarrow{GB}=0$

Alors $4\overrightarrow{GR}+\overrightarrow{GB}=0$

Alors G est le barycentre de $(R,4)\,(B,1)$

Alors $\boxed{G\in(BR)}$

On a : (BR) et (CQ) ne sont pas confondues d'où (QC) et (BR) sont sécantes en G.

2/On a : $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Alors $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GI}=\vec{0}$ car $I=B*C$

Alors G est le barycentre des points pondérés $(A,3)(I,2)$

Alors G,A et I sont alignés.

3/* $M\in E$ équivaut $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|$

Equivaut $\|(3+1)\overrightarrow{MR}\|=\|(3+1)\overrightarrow{MQ}\|$

Equivaut $4MR=4MQ$

Equivaut $MR=MQ$

Equivaut M appartient à la droite Δ

Avec Δ est la médiatrice de $[RQ]$

* *Soit G le barycentre des points pondérés* $(A,3),(B,1)$ *et* $(C,1)$

$M\in F$ équivaut $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|$

équivaut $\|(3+1+1)\overrightarrow{MG}\|=\|2(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB})\|$

$5MG=2CB$

$5MG=10$

$MG=2$

$M\in\mathscr{C}_{(G,2)}$

D'où $F=\mathscr{C}_{(G,2)}$



17 SE PERFECTIONNER

G barycentre $(A,m^2-2)\,(B,3m-2)$

1)

a) G existe si $\alpha+\beta\neq 0$ si $(m^2+2)+(3m-2)\neq 0$

donc si $m^2+3m-4\neq 0$

a = 1 b = 3 et c = -4

$a+b=c=1+3-4=0$ donc $m'=1$ et $m''=-4$

pour que G existe il faut que $m\neq 1$ et $m\neq -4$

alors $m\in\mathbb{R}\setminus\{1,-4\}$

b) $G\in[A,B)$ eq $x_G\geq 0$ équivaut $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\geq 0$

équivaut $\dfrac{3m-2}{m^2+3m-4}\geq 0$

* $3m-2=0$ eq $m=\dfrac{2}{3}$

x	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		1	
$3m-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
m^2+3m-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{3m-2}{m^2+3m-4}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

$m\in\left]-4,\dfrac{2}{3}\right]\cup]1,+\infty[$

donc G barycentre $(A,2)\,(B,4)$

2)

a) $\overrightarrow{AC}=\dfrac{4}{6}\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

b) K la barycentre de $\underbrace{(A,1),(B,2)}$ et $(C,3)$.

Montrons que $K=G*C$?

équivaut K le barycentre de $(G,3)$ et $(C,3)$

car G est barycentre $(A,2)\,(B,4)$

équivaut $K=G*C$

3)

a) *

$C_1=\{M\in P/\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|=3\|2\overrightarrow{MK}-2\overrightarrow{MB}\|\}$

sig $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|=3\|2\overrightarrow{MK}-2\overrightarrow{MB}\|$

sig $\|6\overrightarrow{MK}\|=3\|2\overrightarrow{BK}\|$

sig $6MK=6BK$

sig $MK=BK$ d'où $M\in C_{(K,BK)}$

* $C_2=\{M\in P/\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|=3\|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MG}\|\}$

sig $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MG}\right\|$

sig $\left\|6\overrightarrow{MK}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{GC}\right\|$

sig $6MK = 6GK$

sig $MK = GK$ d'où $M \in C'_{(K,GK)}$

b)

$T=\left\{M \in P / 3\left\|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MG}\right\| \le \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\| \le 3\left\|2\overrightarrow{MK}-2\overrightarrow{MB}\right\|\right\}$

sig $3\left\|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MG}\right\| \le \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\| \le 3\left\|2\overrightarrow{MK}-2\overrightarrow{MB}\right\|$

sig $3\left\|\overrightarrow{GC}\right\| \le \left\|6\overrightarrow{MK}\right\| \le 3\left\|2\overrightarrow{BK}\right\|$

sig $6GK \le 6MK \le 6BK$

sig $GK \le MK \le BK$

donc : M appartient à la couronne limitée par $C_{(K,BK)}$ et $C'_{(K,GK)}$.

18 SE PERFECTIONNER

1) a) $\alpha\overrightarrow{BK}+\beta\overrightarrow{BC}=\vec{0}$?

On a $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{BK}$ alors $3\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Alors B est le barycentre des points pondérés $(K,3)(C,1)$

b) $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$?

on a : $\overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GA}$ alors $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

alors G est le barycentre des points pondérés $(A,2)(B,1)$

c) on a $8\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{GC}=8\overrightarrow{GA}+(3+1)\overrightarrow{GB}$ (car B est le barycentre de $(K,3)(C,1)$)

$=8\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}$

$=8(2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})$

$=\vec{0}$ car G est le barycentre des points pondérés $(A,2)(B,1)$

D'où G est le barycentre des points pondérés $(A,8)(K,3)(C,1)$

2) Soit I le barycentre de $(A,8)(K,3)$

a) On a : $8\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Alors $(8+3)\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Alors $11\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Alors G est le barycentre des points pondérés $(I,11)(C,1)$ Alors G, I et C sont alignés.

b) *on a G, I et C sont alignés alors $I\in(GC)$

*on a I est le barycentre des points pondérés $(A,8)(K,3)$ Alors $I\in(AK)$

(AK) et (GC) ne sont pas sécants alors $\{I\}=(GC)\cap(AK)$

3)a) $M\in E$

équivaut $\left\|8\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|12\overrightarrow{MA}-12\overrightarrow{MG}\right\|$

Equivaut $\left\|(8+3+1)\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|12\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}\right)\right\|$

Equivaut $12MG=12GA$

Equivaut $MG=GA$

Equivaut $M\in\mathscr{C}_{(G,GA)}$

19 SE PERFECTIONNER

1)

2) montrons que $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$

On a : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ alors $3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}$ alors

$3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}$ alors $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$

Alors P est le barycentre des points pondérés $(A,2)(B,1)$

b) $a\overrightarrow{QA}+b\overrightarrow{QD}=\vec{0}$?

on a :

$2\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ alors $-2\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QD}=\vec{0}$

alors $-3\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QD}=\vec{0}$

alors Q est le barycentre des points pondérés $(A,-3)(Q,1)$

3) a) on a :

$\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}$

$=\vec{0}$

Alors C est le barycentres des points pondérés (A,1) ,(B,-1) et (D,-1)

b) $*\,2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=(2+1)\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{CP}$ Car P est le barycentre des points pondérés $(A,2)(B,1)$

* $3\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}=(3+(-1))\ \overrightarrow{CQ}=2\overrightarrow{CQ}$ C (car Q est le barycentre de $(A,-3)(Q,1)$ donc Q est aussi le barycentre de $(A,3),(Q,-1)$)

c) On a : $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

alors $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$

On a : $2\overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CA}-(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})$

$=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

$=3\overrightarrow{CP}$

Alors $\overrightarrow{CQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CP}$

Alors $\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont colinéaires

Alors C , P et Q alignés.



SE PERFECTIONNER

1)On a : $2\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$

Alors G est le barycentre des points pondérés $(C,2)(I,1)$

2) on a : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}+4\overrightarrow{GC}$ car $I=A*B$

$=2\left(\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GC}\right)$

$=2\times\vec{0}$

car G est le barycentre de $(C,2)(I,1)$

$=\vec{0}$

Alors G est le barycentre des points pondérés $(A,1)(B,1)(C,4)$

3)a) $\alpha\overrightarrow{AI}+\beta\overrightarrow{AB}=0$?

On a : I =A*B alors $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ alors $2\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Alors A est le barycentre des points pondérés $(I,2)(B,-1)$

b)* $M\in E$

équivaut $\left\|2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

équivaut $\left\|(2+1)\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|(1+1+1)\overrightarrow{MG'}\right\|$ Avec G' est le centre de gravité de ABC.

Equivaut $3MG=3MG'$

Equivaut $MG=MG'$

Equivaut M appartient à la droite Δ la médiatrice de $[GG']$

D'où $E=\Delta$

* M appartient à F

équivaut $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MI}\right\|\neq 0$

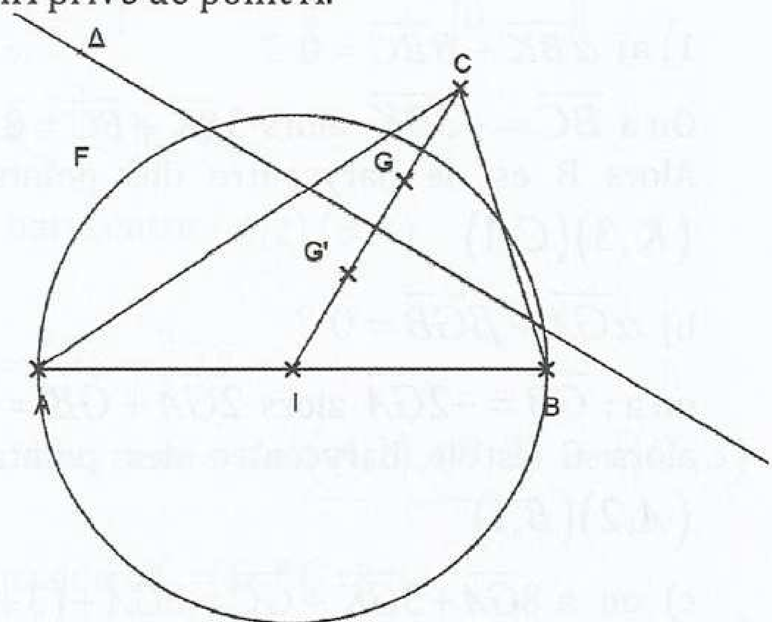
Equivaut $2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=2\left\|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}\right\|$ et $\left\|2\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MB}\right\|\neq 0$

Equivaut $\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|$ et $\left\|(2-1)\overrightarrow{MA}\right\|\neq 0$

Equivaut $2MI=BA$ et $MA\neq 0$

Equivaut $MI=IA$ et $M\neq A$

Equivaut M appartient au cercle ζ d centre I et de rayon IA privé de point A.

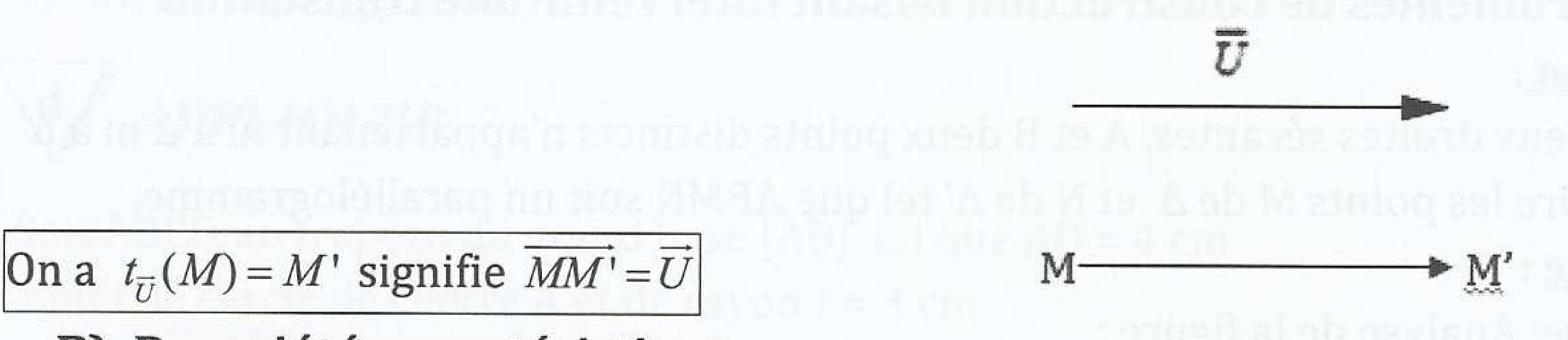


Translation

I) Résumé de cours

A) Définition :

f : P $\longrightarrow$ P est une translation signifie il existe un vecteur constant $\vec{U}$ tel que pour tout point M de P on a f(M) = M' signifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$



On a $t_{\vec{U}}(M) = M'$ signifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$

B) Propriété *caractéristique :*

Soit f une application du plan dan le plan et M et N **deux points quelconques** du plan d'images respectives M' et N'

f est une translation équivaut à $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

C) Propriétés :

1) $\left.\begin{array}{l} t_{\vec{U}}(A) = A' \\ t_{\vec{U}}(B) = B' \end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ d'ou AB =A'B' et (AB) // (A'B')

2)

Une translation conserve:

Les distances	L'alignement
Le parallélisme	L'orthogonalité
Le milieu	Le barycentre
Les angles	Le contact

- L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle
- L'image d'un segment par une translation est un segmente qui lui est parallèle et isométrique.
- L'image d'une demi-droite par une translation est une demi-droite.
- L'image d'un cercle C ' de centre O et de rayon r par une translation est un cercle C 'de centre O' =t (O) et de même rayon r.
- L'image d'un polygone par une translation est un polygone qui lui est superposable

D) Problème de recherche d'ensembles de points faisant intervenir une translation *:*

Question :

Lorsque le point M varie sur l'ensemble Δ déterminer l'ensemble des points N ?

Méthode :

On cherche un vecteur constant $\overrightarrow{U}$ tel que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{U}$

Dans ce cas on a $t_{\overrightarrow{U}}(M)=N$ or M varie sur l'ensemble Δ alors $t_{\overrightarrow{U}}(M)$ varie sur $t_{\overrightarrow{U}}(\Delta)$ alors N varie sur $t_{\overrightarrow{U}}(\Delta)$

E) Problèmes de construction faisant intervenir une translation :

Question :

Δ et Δ' deux droites sécantes, A et B deux points distincts n'appartenant ni à Δ ni à Δ'

Construire les points M de Δ et N de Δ' tel que ABMN soit un parallélogramme.

Méthode :

1ère Etape: Analyse de la figure :

- On cherche un vecteur $\overrightarrow{U}$ des données tel que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{U}$ Dans notre cas on $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BA}$ d'ou $t_{\overrightarrow{BA}}(M)=N$
- On a $M\in\Delta$ alors $t_{\overrightarrow{BA}}(M)\in t_{\overrightarrow{BA}}(\Delta)$ alors **N** $\in t_{\overrightarrow{BA}}(\Delta)$ or **N** ∈ **Δ'** d'où $\boxed{N\in\Delta'\cap t_{\overrightarrow{BA}}(\Delta)}$

2ème Etape: Discussion de l'existence de la solution :

- On discute l'existence de N qui dépend de la position relative de Δ' et $t_{\overrightarrow{BA}}(\Delta)$

3ème Etape: On explique les étapes de la construction qui sont dans notre cas :

- On construit $t_{\overrightarrow{U}}(\Delta)$
- On marque le point $N\in\Delta'\cap t_{\overrightarrow{BA}}(\Delta)$
- On construit le pont M tel que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BA}$

II) Exercices :



APPLIQUER

A et C sont deux points distincts du plan. On considère l'application f du plan dans luis même qui à tout point M associé le point M' tel que $\overrightarrow{AM'}=2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}$

Montrer que f est une translation que l'on caractérisera.



APPLIQUER

Soient un triangle ABC et G le barycentre des points pondérés (A,2) (C,3) et f l'application de P vers P tel que: f(M) =M' signifie $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$

Montrer que f est une translation que l'on caractérisera.

3 APPLIQUER

Soit ABF un triangle On pose $C = t_{\overrightarrow{AB}}(B)$ et $F = t_{\overrightarrow{AB}}(E)$.

1) Construire C et E.
2) Montrer que $t_{\overrightarrow{BE}}(C) = F$
3) Déterminer. $t_{\overrightarrow{AB}}((EF))$
4) Construire $t_{\overrightarrow{AB}}((EA))$



4 APPLIQUER

Soit ABCD un trapèze du grand base [AB] tel que AD = 4 cm
Soit C le cercle de centre A et de rayon r = 3 cm
1) Déterminer l'image de (AB) par $t_{\overrightarrow{AD}}$.
2) Construire C ' l'image de C par $t_{\overrightarrow{AD}}$.
3) On désigne par E l'un des points d'intersections de C et C 'et par Δ la droite passant par E et parallèle à (AD). Δ recoupe C en I et C ' en J.
   a) Déterminer $t_{\overrightarrow{AD}}(\Delta)$
   b) Montrer que $t_{\overrightarrow{AD}}(E) = J$ et $t_{\overrightarrow{AD}}(I) = E$.
   c) En déduire que E = I *J

5 S'ENTRAINER

Soit C un cercle de centre O de diamètre [CD] et soit A un point de C distinct de C et D.
Soit l'application f : P ⟶ P tel que f(M) = M' signifie $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM'} = \vec{0}$
1) Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.
2) Construire C ' l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.(On pose O' le centre de C ')
3) La droite (AC) rencontre C' en B.
   La droite Δ passant par B et perpendiculaire à (AC) rencontre C ' en F
   a) Montrer que $t_{\overrightarrow{CA}}(A) = B$ et que $t_{\overrightarrow{CA}}((AD)) = (BF)$
   b) En déduire que $t_{\overrightarrow{CA}}(D) = F$
   c) Montrer que $t_{\overrightarrow{CD}}(A) = F$

4) Soit T le point défini par $3\overrightarrow{TA}-\overrightarrow{TF}=\vec{0}$ Placer le point T. Déterminer l'ensemble des points T lorsque D et C sont fixes et A varie sur le cercle C

6 S'ENTRAINER

Soit ABC un triangle rectangle en A.
I, J, K sont les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[BC]$ et $[AB]$.

Soit (ζ) le cercle de diamètre $[CI]$ et (ζ') le cercle de diamètre $[AI]$.

1) Démonter que l'image du cercle (ζ) par $t_{\overrightarrow{CI}}$ est le cercle (ζ')
2) Déterminer l'image de la droite (BC) par $t_{\overrightarrow{CI}}$
3) Le cercle (ζ) recoupe (BC) en M et le cercle (ζ') recoupe (IK) en M'
Démontrer que $M'=t_{\overrightarrow{CI}}(M)$
4) Soit $B'=t_{\overrightarrow{CI}}(B)$
   a) Construire le point B'
   b) Démontrer que K est le milieu de $[IB']$
5) On suppose que B et C sont fixes et A variable
Déterminer et construire l'ensemble des points D tel que ABCD soit un parallélogramme.

7 S'ENTRAINER

On donne dans le plan un triangle ABC rectangle en A et on désigne par O le milieu de $[BC]$

1) Construire le point E barycentre des points pondérés $(B,3)$ et $(C,1)$.
2) Soit F le barycentre des points pondérés $(A,1)$ $(E,2)$ et $(B,-2)$.
Montrer que $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
3) On considère l'application : $f:P\to P$
$M\to M'$ tels que $2\overrightarrow{AM'}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$
Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$
4) Soit ζ le cercle de diamètre $[BC]$ et soit ζ' le cercle de centre C et de rayon CO.
   La droite (BC) recoupe ζ' en C'
   a) Déterminer $f(\zeta)$ et $f((BC))$ en déduire $f(C)$

b) Trouver $f(A)$

c) On suppose que les points B et C sont fixes et que A varie. Sur quelle ligne fixe se déplace le point F.

d) Soit $E' = f(E)$; exprimer E' comme barycentre de O et C'



8 S'ENTRAINER

On considère un triangle ABC isocèle en C et le point I milieu de $[AC]$

1) Construire le point E barycentre de $(A,3)$ et $(C,-1)$

2) Soit G le barycentre de $(A,3)$, $(B,1)$ et $(C,-1)$

a) Montrons que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

b) Prouver que G,B et E sont alignés.

c) En déduire une construction **simple** du point G.

3) On suppose dans cette question que les points B et C sont fixes de sorte que le triangle ABC reste isocèle en C. quel est le lieu des points G ?

4) Soit : $f : P \to P$

$M \to M'$ tel que $2\overrightarrow{M'E'} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CA}$

a)Montrer que f est une translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

b) Construire les points $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$

c)montrer que $f(E) = I$

5) a) Trouver les images des droites (AG) et (EG) par f.

b) Les droites $(B'I)$ et (BC) se coupent en G' .Montrer que G' est le barycentre de $(C',-1)$, $(C,3)$ et $(B',1)$



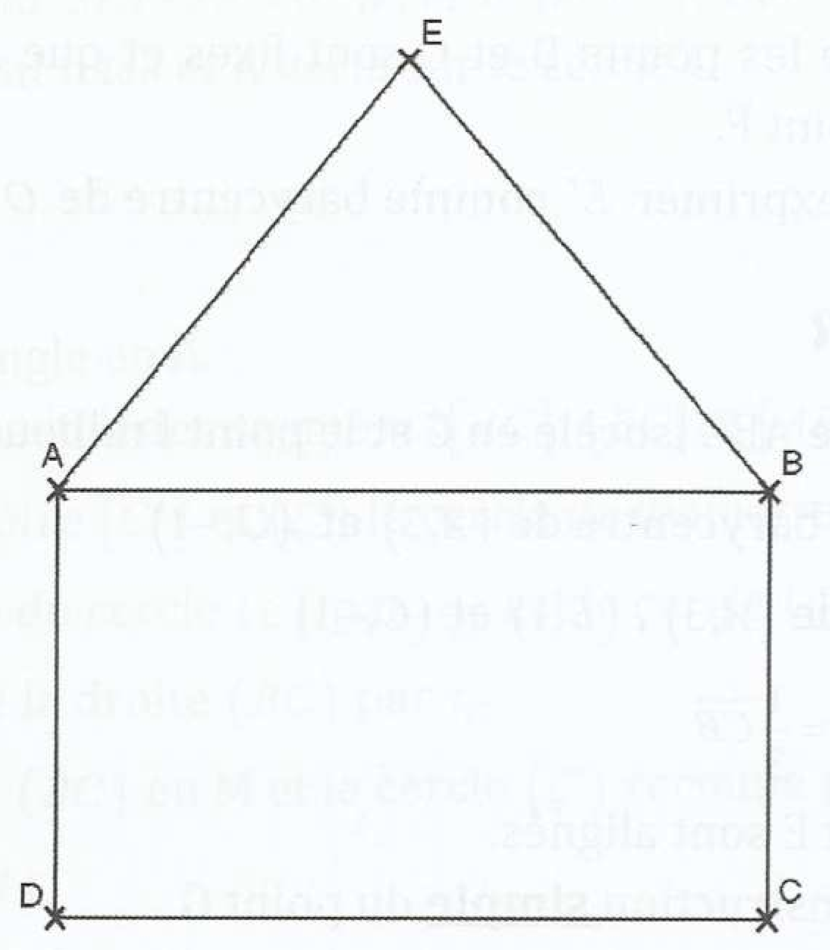
9 S'ENTRAINER

On considère un rectangle ABCD et un point E n'appartient à (AB)
On désigne par C', D' et E' les projetés orthogonaux respectifs de C,D et E sur les droites (AE) ,(BE) et (AB). (Voir figure au dessous)

1) Déterminer l'image de (EE') par $t_{\overrightarrow{AD}}$

2) Soit T_1 la hauteur issue de B dans le triangle ABE et T_2 la hauteur issue de A dans le triangle ABE. Déterminer les images de T_1 et T_2 par $t_{\overrightarrow{AD}}$

3) Montrer que (CC'),(DD') et (EE') sont concourantes.





10 S'ENTRAINER

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que A et B sont fixe et C variable
Soit M un point du plan tel que ABCM soit un parallélogramme
Déterminer et construire l'ensemble E des points M



11 SE PERFECTIONNER

Soit un cercle C de centre O et de rayon r, A est un point fixe de C et M un point variable de C distinct de A.On désigne par E le milieu de [AM] et F le symétrique de E par rapport au milieu I de [OM].

1) Sur quelle ligne fixe varie la point E lorsque M varie ?
2) Montrer que $t_{\overrightarrow{AO}}(E) = F$
3) En déduire l'ensemble des points F lorsque M varie.

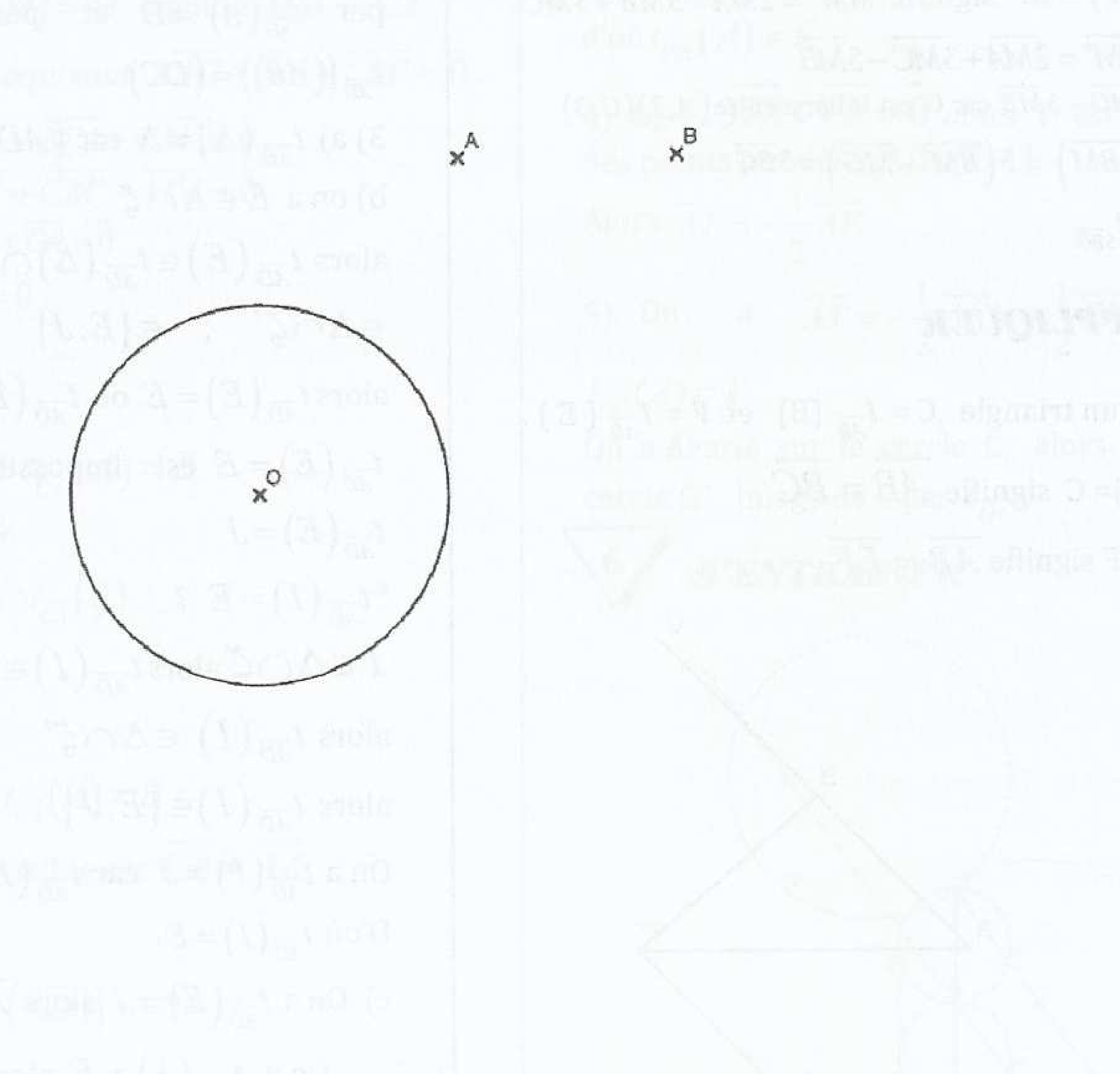


12 SE PERFECTIONNER

Dans le plan on donne deux droites D et D' sécantes en O et deux points A et B comme indique la figure ci-dessous.
Construire deux points M et M' appartenant respectivement à D et D' tels que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

13 SE PERFECTIONNER

Soit un cercle C et A et B deux points distincts et extérieurs à C .
Construire deux points M et N du cercle C tel que ABNM soit un parallélogramme





APPLIQUER

Montrons que pour tout $M \in P$, $f(M) = M'$ signifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$?

On a pour tout $M \in P$, $f(M) = M'$ signifie

$\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$

Signifie $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$

Signifie $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$

Signifie $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AC}$ D'où $f = t_{\overrightarrow{AC}}$



APPLIQUER

G est le barycentre $(A,2)(C,3)$

Montrons que pour tout $M \in P$, $f(M) = M'$ signifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

On a $f(M) = M'$ signifie $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$

signifie $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MB}$

$= (2+3)\overrightarrow{MG} - 5\overrightarrow{MB}$ car G est le barycentre $(A,2)(C,3)$

$= 5\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BM}\right) = 5\left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MG}\right) = 5\overrightarrow{BG}$

D'où $f = t_{5\overrightarrow{BG}}$

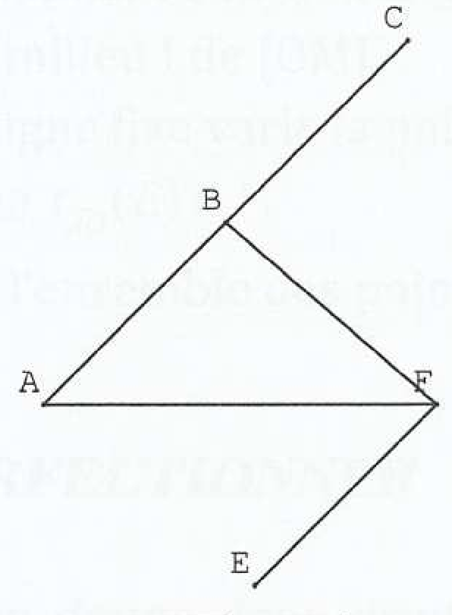


APPLIQUER

Soit ABF un triangle ,C = $t_{\overrightarrow{AB}}$ (B) et F = $t_{\overrightarrow{AB}}$ (E) .

1) $t_{\overrightarrow{AB}}$ (B)= C signifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

$t_{\overrightarrow{AB}}$ (E) = F signifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.



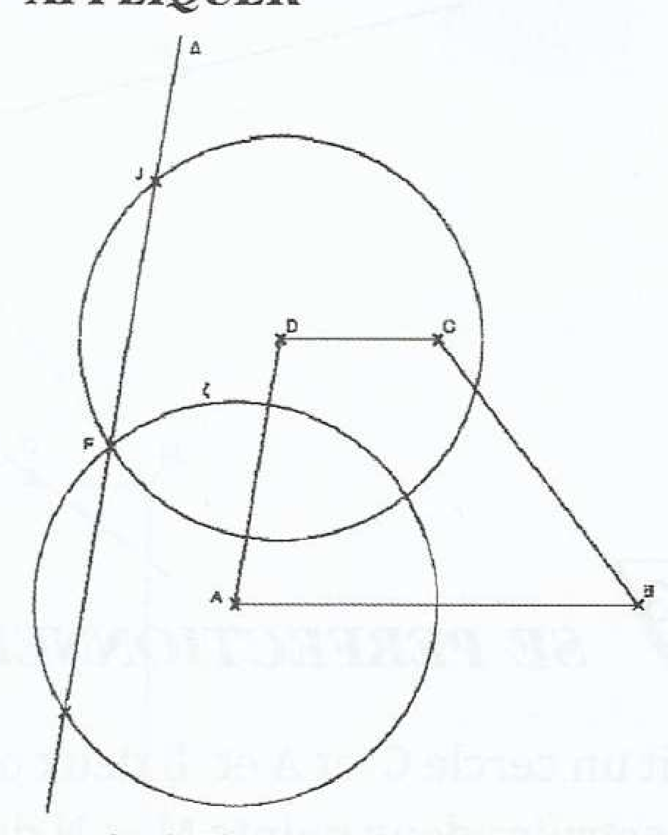
2) Il suffit de montrer que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$

On a $t_{\overrightarrow{AB}}$ (B)= C $\rbrace$ alors $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$ d'où $t_{\overrightarrow{BE}}(C) = F$

$t_{\overrightarrow{AB}}$ (E) = F



APPLIQUER



1) L'image de (AB) par $t_{\overrightarrow{AD}}$ est la droite passant par $t_{\overrightarrow{AD}}(A) = D$ et parallèle à (AB) alors $t_{\overrightarrow{AD}}((AB)) = (DC)$

3) a) $t_{\overrightarrow{AD}}(\Delta) = \Delta$ car $(AD)//\Delta$

b) on a $E \in \Delta \cap \zeta$

alors $t_{\overrightarrow{AD}}(E) \in t_{\overrightarrow{AD}}(\Delta) \cap t_{\overrightarrow{AD}}(\zeta)$,

$\in \Delta \cap \zeta'$; $\in \{E, J\}$

alors $t_{\overrightarrow{AD}}(E) = E$ ou $t_{\overrightarrow{AD}}(E) = J$

$t_{\overrightarrow{AD}}(E) = E$ est impossible car $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{EE}$ d'où $t_{\overrightarrow{AD}}(E) = J$

$*t_{\overrightarrow{AD}}(I) = E$?

$I \in \Delta \cap \zeta$ alors $t_{\overrightarrow{AD}}(I) \in t_{\overrightarrow{AD}}(\Delta) \cap t_{\overrightarrow{AD}}(\zeta)$

alors $t_{\overrightarrow{AD}}(I) \in \Delta \cap \zeta'$

alors $t_{\overrightarrow{AD}}(I) \in \{E, J\}$

On a $t_{\overrightarrow{AD}}(I) \neq J$ car $t_{\overrightarrow{AD}}(E) = J$

D'où $t_{\overrightarrow{AD}}(I) = E$.

c) On a $t_{\overrightarrow{AD}}(E) = J$ alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EJ}$

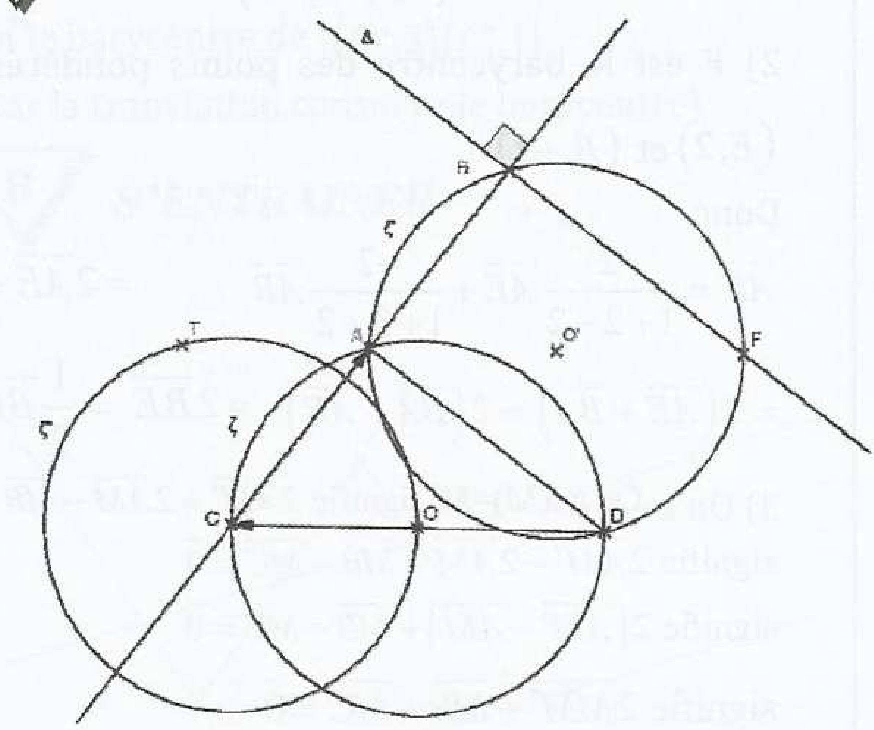
On a $t_{\overrightarrow{AD}}(I) = E$ alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IE}$

D'où $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{EJ}$

Alors $E = I * J$



S'ENTRAINER



$f(M) = M'$ *équivaut* $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM'} = \vec{0}$

1/Montrons que $f(M) = M'$ signifie $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{CA}$?

On a : $f(M) = M'$ *équivaut* $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM'} = \vec{0}$

Signifie $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{CM'} = \vec{0}$

Signifie $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{CM'} + \overrightarrow{M'A} = \vec{0}$

Signifie $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Signifie $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Signifie $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{CA}$

D'où $f = t_{\overrightarrow{CA}}$

3) a) * montrons que $t_{\overrightarrow{CA}}(A) = B$?

On a $A \in (AC) \cap \zeta \Rightarrow$

$t_{\overrightarrow{CA}}(A) \in t_{\overrightarrow{CA}}((AC)) \cap t_{\overrightarrow{CA}}(\zeta)$

$\in (AC) \cap \zeta'$

$\in \{A, B\}$

Alors $t_{\overrightarrow{CA}}(A) = A$ ou $t_{\overrightarrow{CA}}(A) = B$

$t_{\overrightarrow{CA}}(A) = A$ est impossible car $\overrightarrow{CA} \neq \overrightarrow{AA}$

D'où $t_{\overrightarrow{CA}}(A) = B$

*Montrons que $t_{\overrightarrow{CA}}((\overrightarrow{AD})) = (BF)$?

On a ACD triangle inscrit dans le cercle ζ de diamètre $[CD]$ alors ACD triangle en A d'où $(AD) \perp (AC)$.

or $(BF) \perp (AC)$ alors $(BF) // (AD)$

On : l'image de (AD) par $t_{\overrightarrow{CA}}$ est la droite passant par $t_{\overrightarrow{CA}}(A) = B$ et parallèle à (AD) donc $t_{\overrightarrow{CA}}((AD)) = (BF)$

b) on a $D \in (AD) \cap \zeta$

alors $t_{\overrightarrow{CA}}(D) \in t_{\overrightarrow{CA}}((AD)) \cap t_{\overrightarrow{CA}}(\zeta)$

$\in (BF) \cap \zeta'$; $\in \{B, F\}$

D'où $t_{\overrightarrow{CA}}(D) = B$ ou $t_{\overrightarrow{CA}}(D) = F$

On a : $t_{\overrightarrow{CA}}(D) = B$ est impossible car $\overrightarrow{CA} \neq \overrightarrow{DB}$

D'où $t_{\overrightarrow{CA}}(D) = F$

c) $t_{\overrightarrow{CD}}(A) = F$?on a $t_{\overrightarrow{CA}}(D) = F$

Alors $t_{\overrightarrow{CA}}(D) = F$

Alors $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DF}$ Alors $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$

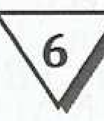
d'où $t_{\overrightarrow{CD}}(A) = F$

4) On : $3\overrightarrow{TA} - \overrightarrow{TF} = \vec{0}$ alors T est le barycentre des points pondéré (A,3) (F,-1)

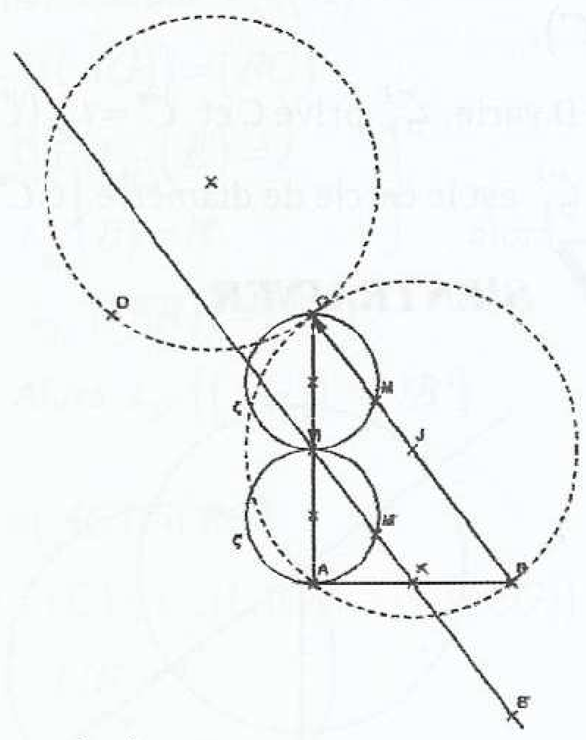
Alors $\overrightarrow{AT} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

5) On a $\overrightarrow{AT} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC}$ alors $t_{\overrightarrow{OC}}(A) = T$

On a A varie sur le cercle C alors T varie sur le cercle C'' image de C par $t_{\overrightarrow{OC}}$.



S'ENTRAINER



1/ On a $t_{\overrightarrow{CI}}(C) = I$

On a $I=A*C$ alors $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{IA}$ alors $t_{\overrightarrow{CI}}(I)=A$

D'où $t_{\overrightarrow{CI}}([CI])=[IA]$

On a ζ est le cercle de diamètre $[CI]$

alors $t_{\overrightarrow{CI}}(\zeta)$ le cercle de diamètre $t_{\overrightarrow{CI}}([CI])=[IA]$ alors $t_{\overrightarrow{CI}}(\zeta)=\zeta'$

2) Dans le triangle ABC on $I=A*C$ et $K=A*B$

Alors $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Alors $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{CI}$ alors $t_{\overrightarrow{CI}}(J)=K$

Or $t_{\overrightarrow{CI}}(C)=I$

Alors $t_{\overrightarrow{CI}}((JC))=(IK)$

Or (JC) =(BC) alors $t_{\overrightarrow{CI}}((BC))=(IK)$

3)a) $M'=t_{\overrightarrow{CI}}(M)$? $M\in(BC)\cap\zeta$

$t_{\overrightarrow{CI}}(M)\in t_{\overrightarrow{CI}}((BC))\cap t_{\overrightarrow{CI}}(\zeta)$

$t_{\overrightarrow{CI}}(M)\in(IK)\cap(\zeta')$; $t_{\overrightarrow{CI}}(M)\in\{I,M'\}$

Or $t_{\overrightarrow{CI}}(C)=I$ et $M\neq I$ alors $t_{\overrightarrow{CI}}(M)=M'$

b) On a : J = B*C alors $t_{\overrightarrow{CI}}(J)=t_{\overrightarrow{CI}}(B)*t_{\overrightarrow{CI}}(C)$

alors $K=B'*I$

5) ABC un parallélogramme alors $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ alors $t_{\overrightarrow{BC}}(A)=D$

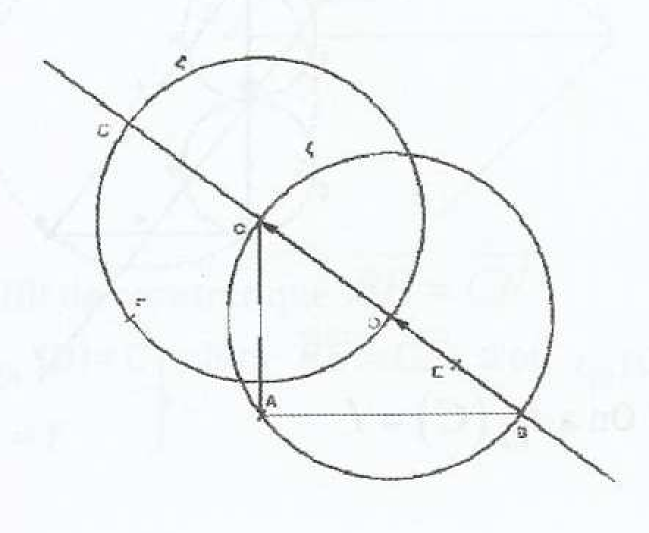
On a ABC triangle rectangle en A alors A varie sur le cercle ζ_1 de diamètre $[BC]$ privé de B et C.

Alors D variesur $t_{\overrightarrow{BC}}(\zeta_1)$ privé de $t_{\overrightarrow{BC}}(B)$ et $t_{\overrightarrow{BC}}(C)$.

Alors D varie ζ_1' privé C et $C'=t_{\overrightarrow{BC}}(C)$

Avec ζ_1' est le cercle de diamètre $[CC']$

7 S'ENTRAINER



1) E barycentre de $(B,3)$ et $(C,1)$ donc $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

2) F est le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(E,2)$ et $(B,-2)$.

Donc

$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{1+2-2}\overrightarrow{AE}+\frac{-2}{1+2-2}\overrightarrow{AB}$ $=2\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AB}$

$=2\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BA}\right)=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\right)$ $=2\overrightarrow{BE}$ $=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

3) On a On a f(M)=M' signifie $2\overrightarrow{AM'}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

signifie $2\overrightarrow{AM'}-2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

signifie $2\left(\overrightarrow{AM'}-\overrightarrow{AM}\right)+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

signifie $2\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

signifie $2\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$

signifie $2\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

signifie $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{BO}$

D'où $f=t_{\overrightarrow{BO}}$

4) $O=B*C$, $\zeta(O,OC)$ et $\zeta'(C,OC)$

* On a l'image de ζ par $t_{\overrightarrow{BO}}$ est le cercle de centre $t_{\overrightarrow{BO}}(O)=C$

et de même rayon d'où $t_{\overrightarrow{BO}}(\zeta)=\zeta'$

*$t_{\overrightarrow{BO}}((BC))=(BC)$ car $(BO)//(BC)$

* On a : $C\in\zeta\cap BC$

alors $t_{\overrightarrow{BO}}(C)\in t_{\overrightarrow{BO}}(\zeta)\cap t_{\overrightarrow{BO}}((BC))$

alors $t_{\overrightarrow{BO}}(C)\in(\zeta')\cap(BC)$

alors $t_{\overrightarrow{BO}}(C)\in\{O,C'\}$

alors $t_{\overrightarrow{BO}}(C)=O$ où $t_{\overrightarrow{BO}}(C)=C'$

On a $\overrightarrow{BO}\neq\overrightarrow{CO}$ alors $t_{\overrightarrow{BO}}(C)\neq O$ donc $t_{\overrightarrow{BO}}(C)=C'$

b) Soit $A'=f(A)$

On a $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $=\overrightarrow{AF}$

D'où $A'=F$

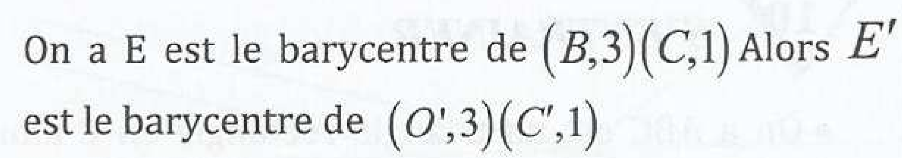
c) on a : $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AF}$ alors $t_{\overrightarrow{BO}}(A)=F$

On a Avarie sur ζ alors $t_{\overrightarrow{BO}}(A)$ varie sur $t_{\overrightarrow{BO}}(\zeta)$ alors F varie sur ζ'.

d) On a : $t_{\overrightarrow{BO}}(E)=E'$, $t_{\overrightarrow{BO}}(B)=O$, $t_{\overrightarrow{BO}}(C)=C'$

On a E est le barycentre de $(B,3)(C,1)$ Alors E' est le barycentre de $(O',3)(C',1)$

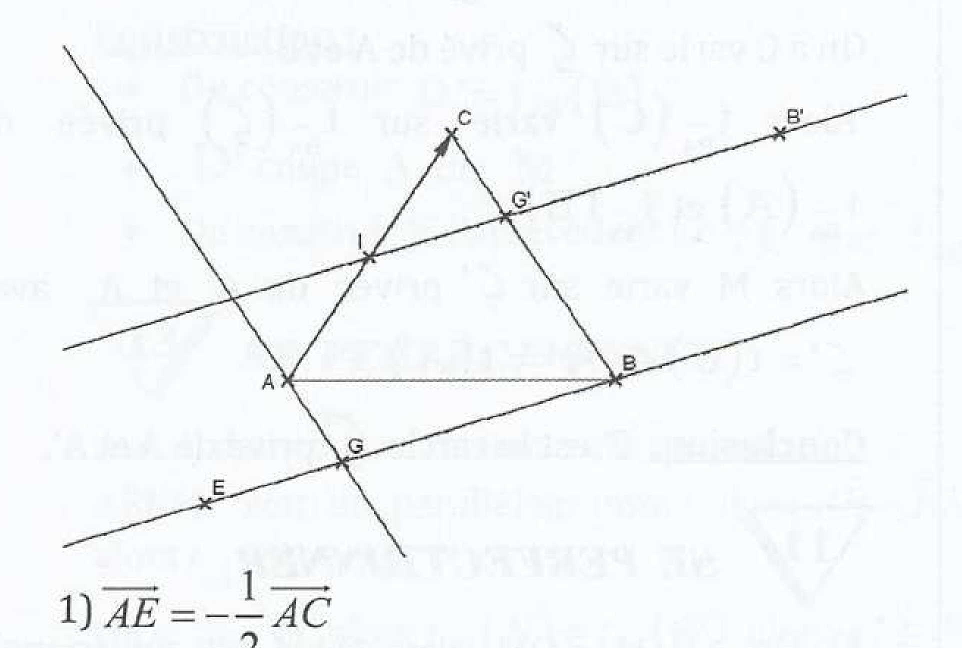
(Car la translation conserve le barycentre)





8 S'ENTRAINER





1) $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2)a) On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{-1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

b) On G est le barycentre des points pondérés $\underbrace{(A,3)(C,-1)}$ $(B,1)$

Alors G bar $(E,3+(-1))$ $(B,1)$

Alors G bary $(E,2)$ $(B,1)$

Alors G, E et B sont alignés.

c) D'après 2)b) on a $G \in (BE)$

alors 2/a on a $(AG)//(CB)$

Alors G appartient à la droite Δ passant par A et // à (BC).

D'où G est l'intersection de Δ et (BE)

3/On a $CA = \underbrace{CB}_{\text{Constante}}$ alors A varie sur le cercle $\zeta_{(C,CB)}$

On a $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ (vecteur constant)

Alors $t_{\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}}(A) = G$

On a Avarie sur le cercle ζ de centre C et de rayon CB alors G varie sur le cercle $\zeta' = t_{\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}}(\zeta)$ de centre $t_{\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}}(C)$ et de rayon CB.

4/ Montons $f(M) = M'$ équivaut $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AC}$?

On a

$f(M) = M'$ équivaut $2\overrightarrow{M'E} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CA}$

équivaut $2\left(\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{ME}\right) = (3-1)\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{CA}$

équivaut $2\overrightarrow{M'M} + 2\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{CA}$

équivaut $2\overrightarrow{M'M} = 2\overrightarrow{CA}$

équivaut $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AC}$

D'où f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

b) $f(B) = B'$ équivaut $t_{\overrightarrow{AC}}(B) = B'$

équivaut $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AC}$

$f(C) = C'$ équivaut $t_{\overrightarrow{AC}}(C) = C'$ équivaut $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC}$

c) $f(E) = I$? $t_{\overrightarrow{AC}}(E) = I$?

On a : $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$ (car $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$) et $I = A*C$

D'où $t_{\overrightarrow{AC}}(E) = I$

5/a) $f((AG))$?

L'image de (AG) par $t_{\overrightarrow{AC}}$ est la droite parallèle à (AG) et passant par $t_{\overrightarrow{AC}}(A) = C$

D'où $t_{\overrightarrow{AG}}((AG)) = (BC)$

- On a $t_{\overrightarrow{AC}}(E) = I$ et $t_{\overrightarrow{AC}}(B) = B'$ alors $t_{\overrightarrow{AC}}((EB)) = (IB')$

  Alors $t_{\overrightarrow{AC}}((EG)) = (IB')$

b)

On a $G \in (AG) \cap (EG)$

Alors $t_{\overrightarrow{AC}}(G) \in t_{\overrightarrow{AC}}((AG)) \cap t_{\overrightarrow{AC}}((EG))$

$\in (BC) \cap (IB')$

$\in \{G'\}$

D'où $t_{\overrightarrow{AC}}(G)=G'$

On a : $\begin{cases} G \text{ est le barycentre de } (A,3),(B,1) \, et (C,-1) \\ t_{\overrightarrow{AC}}(G)=G', t_{\overrightarrow{AC}}(A)=C, \\ t_{\overrightarrow{AC}}(B)=B' \text{ et } t_{\overrightarrow{AC}}(C)=C' \end{cases}$

Comme une translation conserve le barycentre alors G' est le barycentre de $(C,3)$ et $(B',1)$ et $(C',-1)$

9 S'ENTRAINER

On considère un rectangle ABCD et un point E n'appartient à (AB)
On désigne par C', D' et E' les projetés orthogonaux respectifs de C,D et E sur les droites
(AE) ,(BE) et (AB). (Voir figure au dessous)

1) On a (EE') // (AD) alors $t_{\overrightarrow{AD}}((EE'))=(EE')$

2) Soit T_1 la hauteur issue de B dans le triangle ABE et T_2 la hauteur issue de A dans le triangle ABE.

*On $B \in T_1$ alors l'image de T_1 par $t_{\overrightarrow{AD}}$ est la droite passant par $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=C$ et parallèle à (AD)

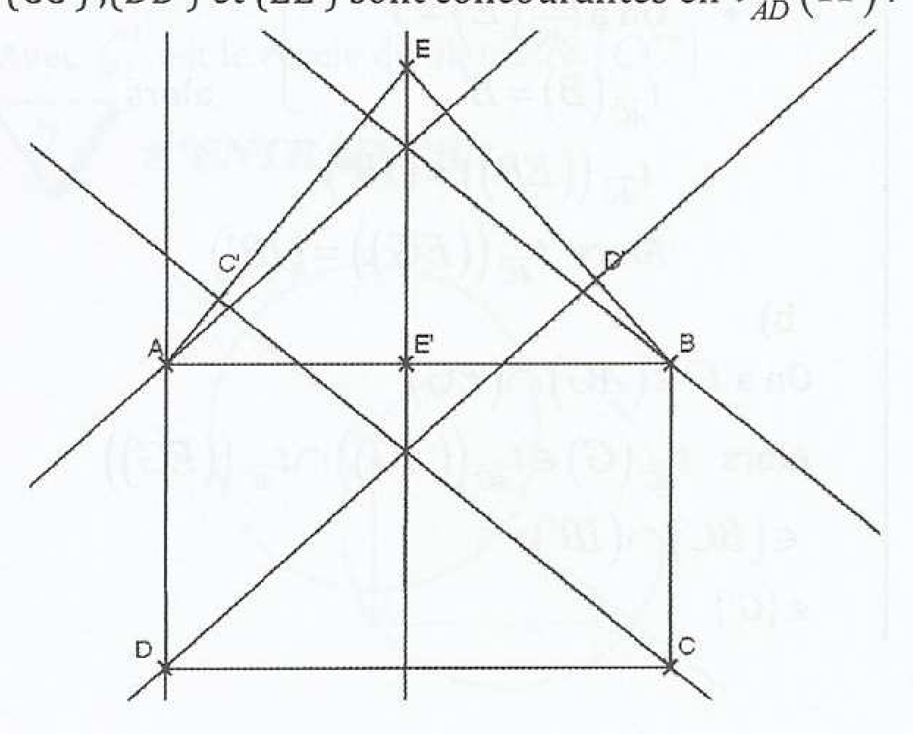
Alors $t_{\overrightarrow{AD}}(T_1)=(CC')$.

*On $A \in T_2$ alors l'image de T_2 par $t_{\overrightarrow{AD}}$ est la droite passant par $t_{\overrightarrow{AD}}(A)=D$ et parallèle à (AD)

Alors $t_{\overrightarrow{AD}}(T_1)=(CC')$.

Déterminer les images de T_1 et T_2 par $t_{\overrightarrow{AD}}$

3) On a T_1 et T_2 et (EE') sont concourantes en H orthocentre de ABE alors leurs images par $t_{\overrightarrow{AD}}$ (CC') ,(DD') et (EE') sont concourantes en $t_{\overrightarrow{AD}}(H)$.



10 S'ENTRAINER

• On a ABC est un triangle rectangle en C alors C varie sur le cercle ζ de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

• On a ABCM est un parallélogramme alors $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{GA}$ alors $t_{\overrightarrow{BA}}(C)=M$

On a C varie sur ζ privé de A et B

Alors $t_{\overrightarrow{BA}}(C)$ varie sur $t_{\overrightarrow{BA}}(\zeta)$ privée de $t_{\overrightarrow{BA}}(A)$ et $t_{\overrightarrow{BA}}(B)$

Alors M varie sur ζ' privée de A' et A avec $\zeta'=t(\zeta)$ et $A'=t(A)$

Conclusion: E est le cercle ζ' privé de A et A'.



11 SE PERFECTIONNER

1) On a : OA = OM alors OAM est un triangle isocèle O

Or $E = A * M$ alors $(OE) \perp (AM)$

Alors OEM est un triangle rectangle en E

Alors E varie sur le cercle ζ' de diamètre $[OM]$

2) On a : $I = A * F$ et $I = O * M$ alors $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{MF}$

alors $t_{\overrightarrow{AO}}(M)=F$

On a : M varie sur ζ privé de A

alors F varie sur $\zeta''=t_{\overrightarrow{AO}}(\zeta)$ privé de $t_{\overrightarrow{AO}}(A)=O$



12 SE PERFECTIONNER

On a $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}(M)=M'$

On a : $M \in D$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}(M) \in t_{\overrightarrow{AB}}(D)$

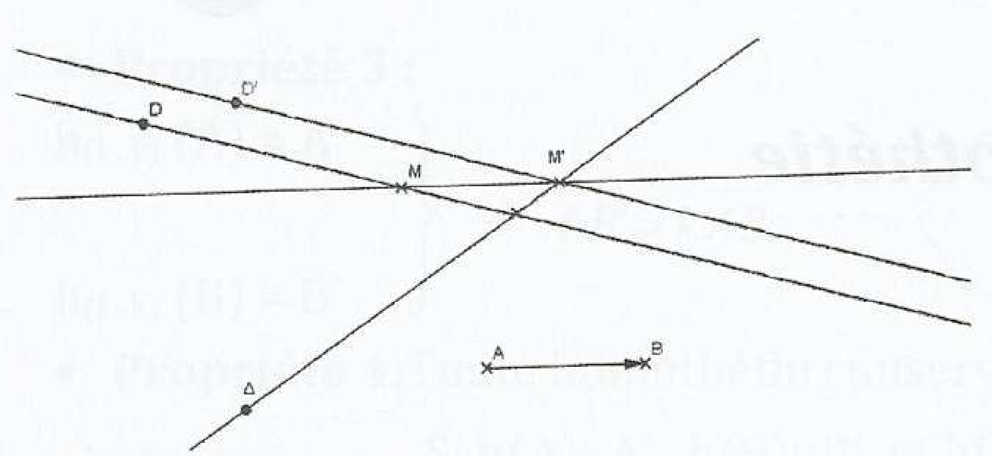
alors $M' \in t_{\overrightarrow{AB}}(D)$

alors $\boxed{M' \in D'}$ avec $D'=t_{\overrightarrow{AB}}(D)$

D'autre part $\boxed{M' \in \Delta}$ alors $M' \in \Delta \cap D'$

Or $D // D'$ alors Δ et D' sont sécante en un point qui est M'





Construction :

- On construit $D' = t_{\overrightarrow{AB}}(D)$
- D' coupe Δ en M'
- On construit M l'antécédent de M' par $t_{\overrightarrow{AB}}$.



SE PERFECTIONNER

A et B deux points distincts et extérieurs à C .

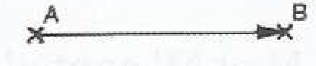
ABNM soit un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$

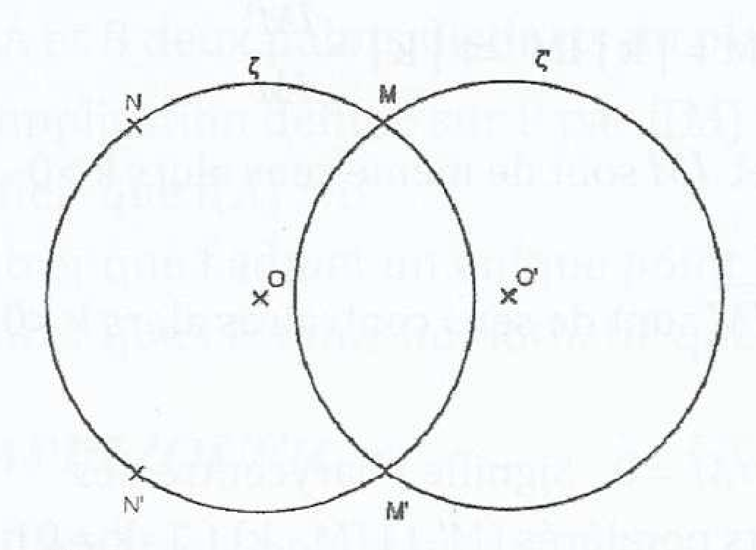
alors $t_{\overrightarrow{AB}}(N) = M$

On a $N \in \mathscr{C}$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}(N) \in t_{\overrightarrow{AB}}(\mathscr{C})$ alors $M \in \mathscr{C}'$

où $\mathscr{C}' = t_{\overrightarrow{AB}}(\mathscr{C})$

D'autre part $M \in \mathscr{C}$ alors $M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$





Construction :

- On construit $\mathscr{C}' = t_{\overrightarrow{AB}}(\mathscr{C})$
- $\mathscr{C}'$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points M et M' (donc on a deux solutions)
- La parallèle à (AB) passant M recoupe $\mathscr{C}$ en N

La parallèle à (AB) passant M' recoupe $\mathscr{C}$ en N'

Homothétie

I) Résumé de cours

A) Définition d'une homothétie:

1) Définition :

Soient I un point du plan et k un réel non nul donné.

L'application h de P dans Ptel que h(M)=M' signifie $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$; s'appelle l'homothétie de centre I et de rapport k.

L'application h est noté $h = h_{(I,k)}$.

$h_{(I,k)}(M) = M'$ signifie $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$

2) Cas particuliers : $h_{(I,1)}$ est l'identité du plan noté Id_P

$h_{(I,-1)}$ est la symétrie centrale S_I.

Remarques:

$h_{(I,k)}(M) = M'$ signifie $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ →

- I ,M et M' sont alignés
- IM'= | k | IM $\Rightarrow |k| = \dfrac{IM'}{IM}$
- * Si $\overrightarrow{IM'}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont de même sens alors k >0
- * Si $\overrightarrow{IM'}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont de sens contraires alors k <0
- $\overrightarrow{IM'} - k\overrightarrow{IM} = \vec{0}$ Signifie I barycentre des points pondérés (M',1) (M,- k) (1- k ≠ 0)

Retenons:

Si $h_{(I,k)}(M) = M'$ alors le centre I de h appartient à (MM')

3) Propriétés :

- **Propriété 1 :** Le centre d'une homothétie h de rapport différent de 1 est le seul point invariant.
- **Propriété 2 :** L'homothétie de centre I et de rapport k est une bijection de P sur lui-même et son application réciproque est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{k}$

$h_{(I,k)}(M) = M'$ signifie $h_{(I,\frac{1}{k})}(M') = M$

- **Propriété 3 :**

$h_{(I,k)}(A) = A'$ et $h_{(I,k)}(B) = B'$ $\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ $\rightarrow$ $A'B' = |k|\,AB$ et $(A'B') \,//\, (AB)$

- **Propriété 4:** Toute homothétie conserve les écarts angulaires
  Si h(A)=A', h(B)=B' et h(C)=C' on a $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

- **Propriété 5 :** Toute homothétie du plan conserve l'alignement, les milieux, les barycentres

4) <u>Images de figures simples par une homothétie:</u>

Soit $h_{(I,k)}$ une homothétie :

- L'image d'une droite Δ par h est une droite qui lui est parallèle en particulier si $I \in \Delta$ alors $h(\Delta) = \Delta$
- Un segment [AB] en un segment [A'B'] avec A' = h(A) et B' = h(B).
- Une demi-droite en une demi-droite.

L'image d'un cercle $\mathscr{C}$ (O, r) par h est un cercle $\mathscr{C}'$ (O', r') avec O' = h(O) et r' =| k |r

II) Exercices



APPLIQUER

Soient A et B deux points distincts du plan.

Soit f l'application définie sur P par f(M) = M' signifie $2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{BM'} = \vec{0}$

1) Vérifier que f(A) = B
2) Montrer que f admet un unique point invariant I.
3) Montrer que f est une homothétie que l'on caractérisera.

2/ *APPLIQUER*

Soit A, B et C trois points non alignés

Soit f l'application définie sur P par f(M) = M' signifie $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$

1) Montrer que f admet un unique point invariant I.
2) Montrer que f est une homothétie que l'on caractérisera.

3/ *APPLIQUER*

Soit un segment [AB],

Déterminer et construire le centre I de l'homothétie de rapport – 2 tel que h(A) =B



4 APPLIQUER

Soit ABB'A' un trapèze de bases [AB] et [A'B'] tel que $A'B' = \frac{1}{3}$ AB.

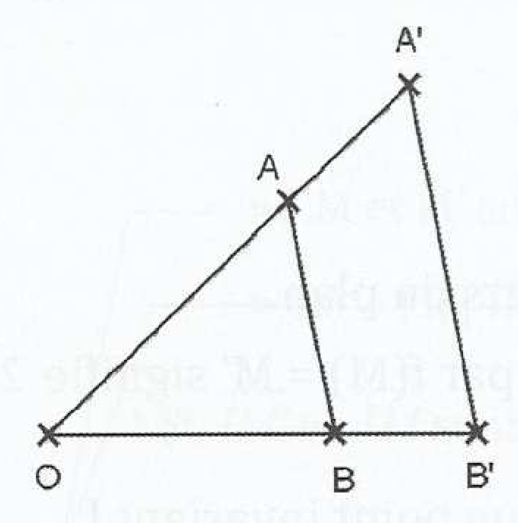
E le milieu de [AB] et F le milieu de [A'B'] .Soit h l'homothétie tel que h(A) = A' et h(B) =B'

1) Déterminer O le centre de h.
2) Montrer que h(E) = F.
3) Soit l'homothétie h' tel que h'(A)=B' et h(B) =A'
   a) Déterminer le centre de O' et le rapport k' de h'.
   b) Montrer que O,O',E et F sont alignés.



5 APPLIQUER

On considère la figure ci-dessous où AB= 2 et A'B' = 3



Soit h l'homothétie de centre O et tel que h(A) = A'

1) Déterminer k le rapport de h
2) Montrer que h(B) = B'



6 APPLIQUER

Soit ABCD un trapèze de base [AB] et [CD] tel que AB=3,CD=5 et BC = 3

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k telle que h(A) =C et h(B) =D

1) Déterminer le centre O et le rapport k de h
2) Construire $\Delta = h((BC))$ et en déduire une construction simple du point E =h(C)
3) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [BC].Déterminer $\mathscr{C}'$ =h($\mathscr{C}$)
4) Soit Δ' la parallèle à (AD) passant par O, Δ' coupe (AB) en M et (CD) en N

Montrer que h(M) =N et que $\overrightarrow{NC} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{ND}$



S'ENTRAINER

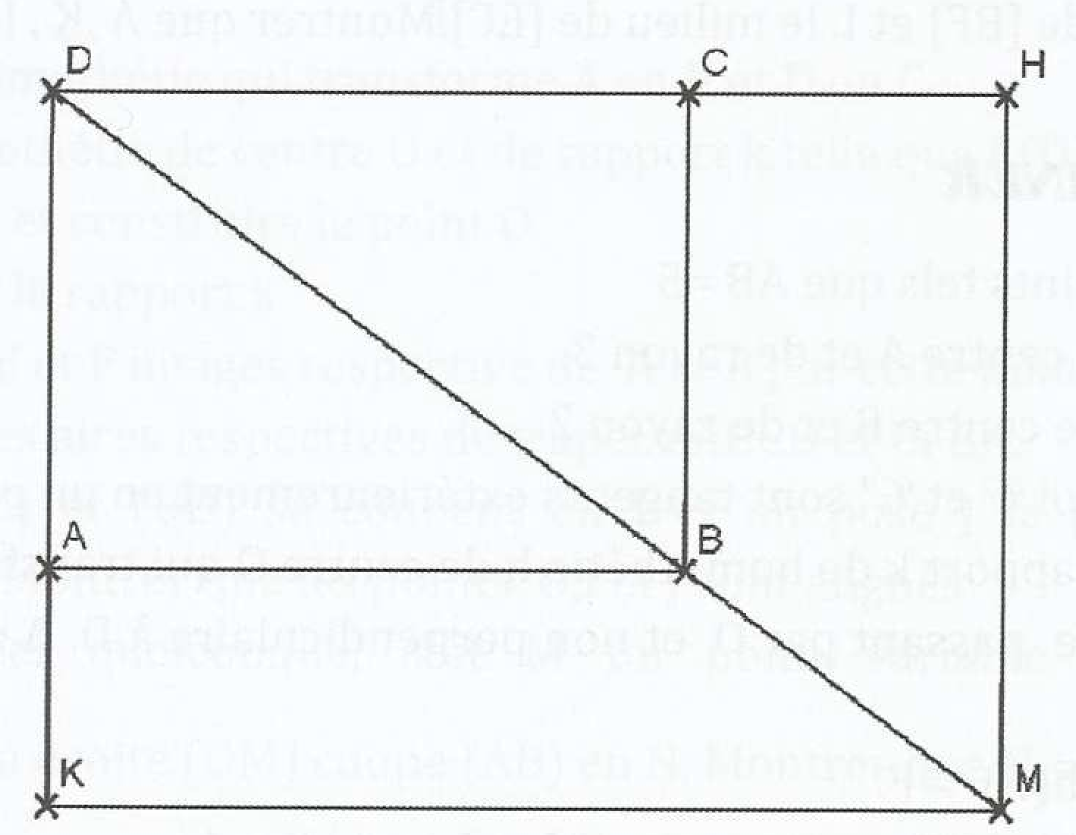
Soit ABCD un rectangle tel que AB = 4 et AD =3 .Soit M le point défini par $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$

H est le projeté orthogonal de M sur (CD) et K le projeté orthogonal de M sur (AD).

1) Montrer que $\overrightarrow{DH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{3}{2}$.Déterminer h(B) ,h(C) et h(A).

3) Quelle est la nature du quadrilatère MHDK ? Déterminer son périmètre et son aire.





S'ENTRAINER

Soit un triangle ABC. On désigne par I ,J,et K les milieux respectifs des cotés [AB] , [AC] et [BC] et par G le centre de gravité du triangle ABC.

Soit l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$

1) Déterminer les images respectives de A,B et C par h.
2) Soit H l'orthocentre du triangle ABC et O le centre de son cercle circonscrit.
   a) Déterminer h((AH) et h((BH))
   b) En déduire que les points O,G et H sont alignés.



S'ENTRAINER

On considère les cercles $\mathscr{C}$(O ,5) et $\mathscr{C}'$ (O' ,2).tel que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents intérieurement en A .la droite (OO') recoupe $\mathscr{C}$ en C et $\mathscr{C}'$ en B

1) Faire une figure

2) Déterminer le rapport k de l'homothétie h de centre A tel que h($\mathscr{C}$) = $\mathscr{C}$'.

3) Soit E un point variable de C distincts de A et C , la droite (AE) recoupe C' en F.

a) Montrer que h(E)= F.

b) Montrer que (EC) // (BF).

c) Calculer le rapport $\frac{BF}{EC}$ et $\frac{Aire(AEC)}{Aire(ABF)}$

4) Les droites (BE) et (FC) se coupent en un point I.

a) Montrer que I est l'image de E par l'homothétie h' de centre B et de rapport 2/7.

b) Déterminer l'ensemble des points I lorsque E varie sur $\mathscr{C}$.

5) Soit K le milieu de [BF] et L le milieu de [EC].Montrer que A ,K , I et L sont alignés.



10 S'ENTRAINER

Soit A et B deux points tels que AB =5

Soit le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 3.

Soit le cercle $\mathscr{C}$' de centre B et de rayon 2.

1) Justifier pourquoi $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' sont tangents extérieurement en un point O.

2) Déterminer le rapport k de homothétie h de centre O qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$'.

3) Soit Δ une droite passant par O et non perpendiculaire à D. Δ coupe $\mathscr{C}$ en E et $\mathscr{C}$' en F.

a) Montrer que h(E) = F.

b) Soit I = A*E et J= B*F montrer que O,I et J sont alignés

4) On suppose que Δ est variable déterminer et construire l'ensemble décrit par :

a) Le milieu I de [AE].

b) Le centre de gravité G du triangle OAE



11 S'ENTRAINER

MNO est un triangle rectangle en M tel que OM = 4,5 et MN = 3 (l'unité étant le cm)

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{5}{3}$.

1) Construire le point P l'image du point N par l'homothétie h.

2) Soit Q le projeté orthogonal du P sur la droite (OM)

a) Déterminer l'image de la droite (MN) par l'homothétie h.

b) Montrer que h(M) = Q

c) En déduire les distances OQ et PQ.

3) Déterminer le centre I et le rapport k de l'homothétie h' qui transforme M en P et N en Q.

4) On désigne par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles des centres respectives M et P qui sont tangents en I.

a) Monter que $h'(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$

b) $\mathscr{C}$ coupe [MN] en A et $\mathscr{C}'$ coupe [PQ] en B. Montrer que les points A,I et B sont alignés.



SEPERFECTIONNER

Soit: ABCD un trapèze tel que : $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

1) Existe-il une homothétie qui transforme A en B et D en C

2) Soit h une homothétie de centre O et de rapport k telle que h(D) = A et h(C)= B.

a) Déterminer et construire le point O

b) Déterminer le rapport k

c) Construire E et F images respective de A et B par cette homothétie h

d) Comparer les aires respectives de trapèze ABCD et EFBA.

3)Les droites (AC) et (BD) se coupent en I et on pose J le point tel que CIDJ parallélogramme, Montrer que les points O,I et J sont alignés

4)x étant un réel quelconque, soit M un point variable du plan tel que $\overrightarrow{DM} = \frac{x^2}{2x^2+1}\overrightarrow{DC}$ la droite (OM) coupe (AB) en N, Montrer que N = h (M)



SEPERFECTIONNER

Soit A , B et C trois points du plan tels que BC =4 et $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$

Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de diamètres respectifs [AB] et [AC]

Une droite D non perpendiculaire à (AB) et distincts de (AB) passant par A recoupe $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ respectivement en M et N. Soit J le point d'intersection de (BN) et (CM).

1) Faire une figure.

2) Soit h l'homothétie qui transforme Ben N et M en C.

Déterminer le centre et le rapport de h.

3) Montrer que J est l'image de N par une homothétie h' de centre B dont on déterminera le rapport.



SEPERFECTIONNER

Soit un cercle fixe $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 3 et soit A un point extérieur à C et fixe.

Soit M un point mobile de $\mathscr{C}$.

Déterminer lorsque M varie sur $\mathscr{C}$ l'ensemble sur le quel varie le centre de gravité G du triangle AOM.



SEPERFECTIONNER

Soit D et Δ deux droites sécantes et A un point n'appartenant ni à D ni à D'.

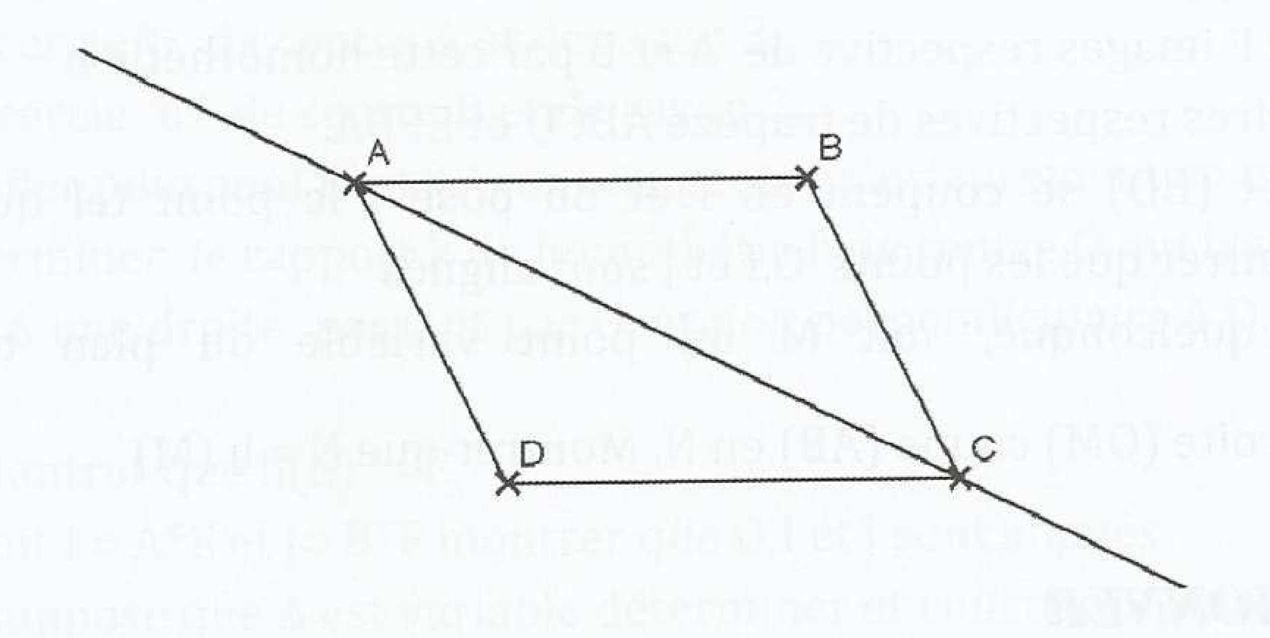
Construire un point M de D et un point N de Δ tel que $3\overrightarrow{AM}+8\overrightarrow{NA}=\vec{0}$



SEPERFECTIONNER

Soit un parallélogramme ABCD

Déterminer l'ensemble E des centres des homothéties qui transforme les droites (AB) et (AD) respectivement en (CD) et (BC)





APPLIQUER

Soient A et B deux points distincts du plan.
Soit f l'application définie sur P par f(M) = M'
signifie 2 $\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{BM'}=\vec{0}$

1) Vérifier que f(A) = B

On a : 2 $2\overrightarrow{AA}-3\overrightarrow{BB}=2.\vec{0}-3\cdot\vec{0}=\vec{0}$ alors $f(A)=B$

2) Si I un point invariant par f signifie

$f(I)=I$

Signifie $2\overrightarrow{AI}-3\overrightarrow{BI}=\vec{0}$

Signifie $-2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Signifie I barycentre $(A,-2)(B,3)$

On a $(-2)+3=1\neq 0$ D'où I existe et il est unique

3) Montrons que pour tout $M\in P, f(M)=M'$ signifie $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$?

Pour tous $M\in P, f(M)=M'$ signifie

$2\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{BM'}=\vec{0}$ Signifie $2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{IM}-3\overrightarrow{BI}-3\overrightarrow{IM'}=\vec{0}$

Signifie $-2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IM}-3\overrightarrow{IM'}=\vec{0}$

Signifie $\vec{0}+2\overrightarrow{IM}-3\overrightarrow{IM'}=\vec{0}$ (car I barycentre de $(A,-1)(B,3)$)

Signifie $\overrightarrow{IM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IM}$

D'où f est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$.



APPLIQUER

Soit A, B et C trois points non alignés

Montrons que pour tout $M\in P, f(M)=M'$ signifie $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$?

*Montrons que f admet un unique point invariant I.

Si I un point invariant par f signifie $f(I)=I$

Signifie $\overrightarrow{II}=\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}$

Signifie $\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Signifie I le barycentre de $(A,1),(B,-3)$ et $(C,-2)$

$1+(-3)+(-2)=-4\neq 0$ d'où I existe et il est unique

*Montrons que pour tout $M\in P, f(M)=M'$ signifie $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$?

On a pour tout $M\in P, f(M)=M'$ signifie

$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

signifie $\overrightarrow{MM'}=(1-3-2)\overrightarrow{MI}$

signifie $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IM'}=-4\overrightarrow{MI}$

signifie $\overrightarrow{IM'}=4\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}$

signifie $\overrightarrow{IM'}=5\overrightarrow{IM}$

D'où f est l'homothétie de centre I et de rapport 5.



APPLIQUER

Soit un segment [AB]

$h_{(I,-2)}(A)=B$ signifie $\overrightarrow{IB}=-2\overrightarrow{IA}$ Signifie $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Signifie I barycentre $(A,2)(B,1)$

Signifie $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

A I B



APPLIQUER

Soit ABB'A' un trapèze de bases [AB] et [A'B'] tel que A'B' = $\frac{1}{3}$ AB.

Et le milieu de [AB] et F le milieu de [A'B'].

1) Soit O le centre de h

$h(A)=A'$ donc $O\in(AA')$

$h(B)=B'$ donc $O\in(BB')$

Donc $O\in(AA')\cap(BB')$

2) On a : $E=A*B\Rightarrow h(E)=h(A)*h(B)$ (Car h conserve le milieu) $=A'*B'$

3) $h'(A)=B'$, $h'(B)=A'$

a) Soit O' le centre de h'

$h'(A)=B'$ alors $O'\in(AB')$

$h'(B)=A'$ alors $O'\in(BA')$

Donc $O'\in(AB')\cap(BA')$

$\left.\begin{array}{l}h'(A)=B'\\h'(B)=A'\end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{BA}$ et $A'B'=|k|BA$

alors $|k|=\frac{A'B'}{BA}$ *alors* $|k|=\frac{1}{3}$

On a : $k'<0$ Car $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont de sens contraire

Conclusion : $k'=-\frac{1}{3}$

b/ On a : $E = A * B \Rightarrow h'(E) = h'(A) * h'(B)$

$\Rightarrow h'(E) = B' * A' \Rightarrow h'(E) = F$

On a : $h'(E) = F$ et O' est l centre de l'homothétie donc O', E, F alignés (1)

Or $h(E) = F$ alors O,E,F alignés (2)

D'après (1) et (2) O, O', E, F sont alignés

5 APPLIQUER

1) h de centre O tel que $h(A) = A'$

$h(A) = A' \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ et $OA' = |k| OA$ alors

$|k| = \dfrac{OA'}{OA}$

Or $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires de même sens alors $k > 0$ alors $k = \dfrac{OA'}{OA}$

Dans le triangle OA'B' On a :

$\left.\begin{array}{l}(AB)//(A'B')\\ A \in (OA')\\ B \in (OB')\end{array}\right\}$ D'après le théorème de Thalès

$\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{3}{2}$ Alors $k = \dfrac{2}{3}$

2) h(B)=B' ?

On a : $\overrightarrow{OB'}$ et $\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$. On a la même direction, le même sens et la même longueur alors $\overrightarrow{OB'} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

alors $h(B) = B'$

2ème méthode :

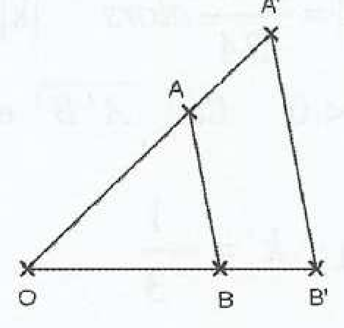
On a :

$B \in (OB) \cap (AB)$ alors $h(B) \in h((OB)) \cap h((AB))$

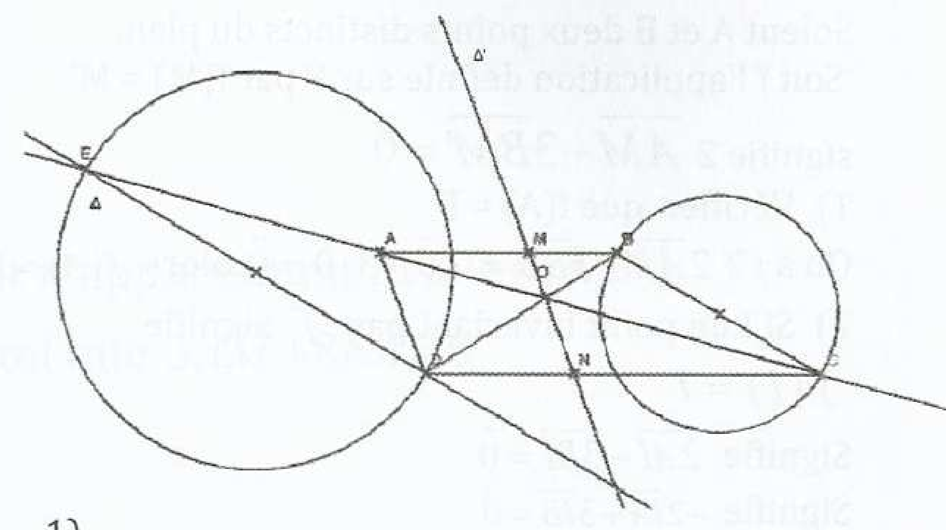
$h((OB)) = (OB)$ car (OB) passe par le centre de h

$h((AB))$ est la droite passant par $h(A) = A'$ et parallèle à (AB) alors $h((AB)) = (A'B')$

D'où $h(B) \in (OB) \cap (A'B') \in \{B'\} \rightarrow h(B) = B'$



6 APPLIQUER



1)

• $h(A) = C$ alors $O \in (AC)$

$h(B) = C$ alors $O \in (BD)$

D'où $O \in (AC) \cap (BD)$

• On a $h(A) = C$ et $h(B) = D$

Alors $CD = |k| AB$ alors $|k| = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{5}{3}$

Or $h(A) = C$ alors $\overrightarrow{OC} = k\,\overrightarrow{OA}$ alors $k < 0$ (car $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaire de sens contraires)

alors $\boxed{k = -\dfrac{5}{3}}$

2) • $h((BC))$ est la droite passant par $h(B) = D$ et parallèle à (BC) alors Δ la droite passant par D et parallèle à (BC)

• On a $C \in (BC)$ alors $h(C) \in h((BC))$

alors $\boxed{E \in \Delta}$

On a $h(C) = E$ alors $\boxed{E \in (OC)}$

Conclusion : $\{E\} = \Delta \cap (OC)$

3) ζ de diamètre $[BC]$ et $\zeta' = h(\zeta)$ alors ζ' est le cercle de diamètre $h([BC]) = [DE]$

4) On a $M \in (AB) \cap \Delta$

alors $h(M) \in h((AB)) \cap h(\Delta)$

alors $h(M) \in (DC) \cap \Delta$

alors $h(M) \in \{N\}$

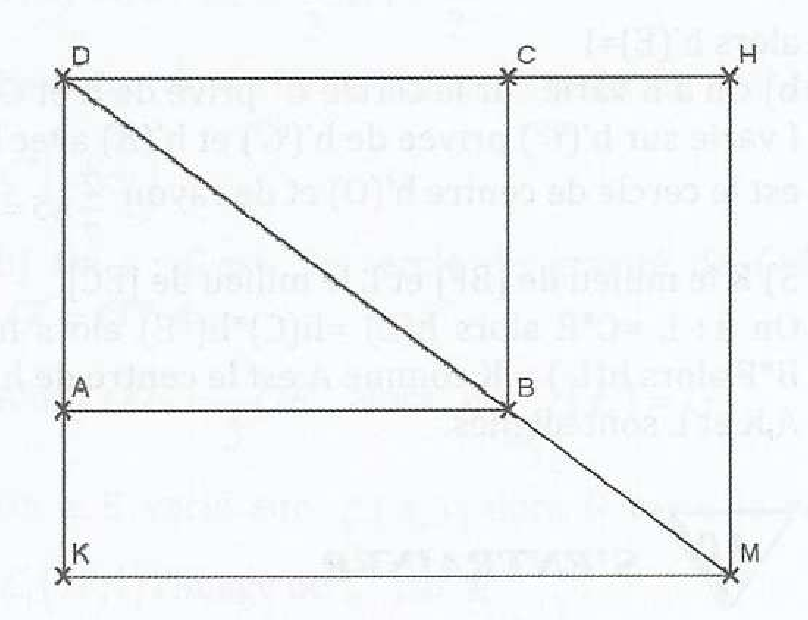
Alors $h(M)=N$

• On a $\left.\begin{array}{l}h(M)=N\\h(A)=C\end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{NC}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{MA}$

Or $(AM)\parallel(DN)$ et $(MN)\parallel(AD)$ alors AMN est un parallélogramme alors $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{ND}$ alors $\overrightarrow{NC}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{ND}$



S'ENTRAINER



1) Dans le triangle DMH on a :
$C\in(DH)$, $B\in(DM)$ et $(CB)\parallel(HM)$

Or $\overrightarrow{DM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$

alors d'après la forme vectorielle de théorème de Thalès on a $\overrightarrow{DH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$

2) * $\overrightarrow{DM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$ alors $h(B)=M$

* $\overrightarrow{DH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$ alors $h(C)=H$

* Dans le triangle DKM on a :
$A\in(DK),\ B\in(DM)\ (AB)\parallel(KM)$

or $\overrightarrow{DM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$ alors d'après la forme vectorielle de théorème de Thalès on a :

$\overrightarrow{DK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$ alors $h(A)=K$

3) On a $h(ABCD)=MHDK$

Or ABCD est rectangle alors MHDK est un rectangle car une homothétie conserve le Parallélisme et l'orthogonalité.

• Périmètre $(MHDK)=|k|$

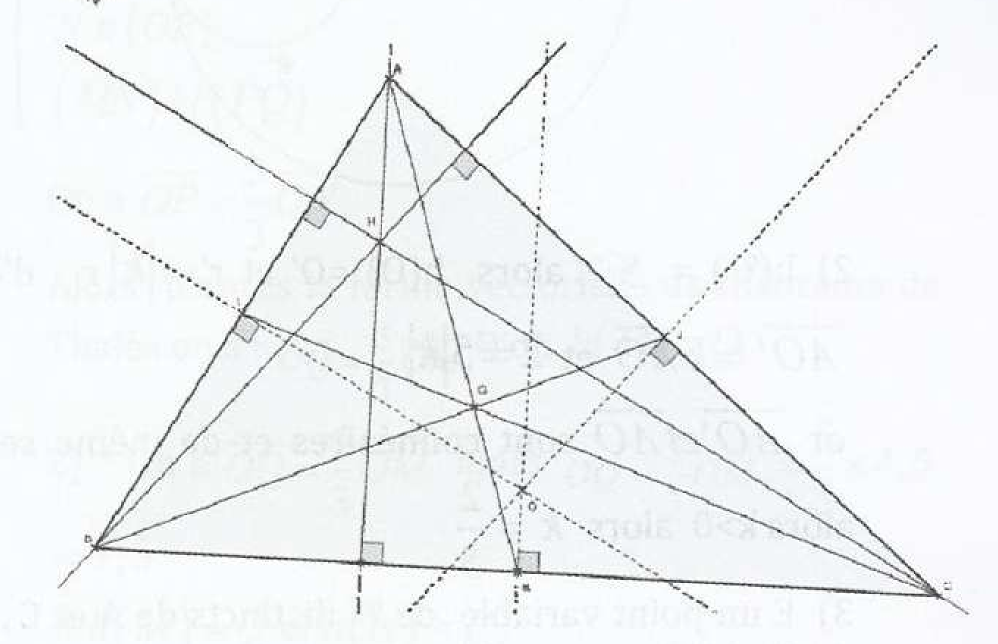
Périmètre $(ABCD)=\frac{3}{2}\times 14=21$

• Aire $(MHDK)=k^2$

Aire $(ABCD)=\frac{9}{4}\times 12=27$



S'ENTRAINER



1) On a $\overrightarrow{GK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ alors $h(A)=K$

• On a : $\overrightarrow{GJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ alors $h(B)=J$

• On a : $\overrightarrow{GJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ alors $h(C)=I$

2) a) $h((AH))$ est la droite passant par $h(A)=K$ et parallèle à (AH) alors $h((AH))=(OK)$

$h((BH))$ est la droite passant par $h(B)=J$ et parallèle à (BH) alors $h((BH))=(OJ)$

a) On a

$H\in(AH)\cap(BH)\Rightarrow h(H)\in h((AH))\cap h((BH))$
$\in(OK)\cap(OJ)$
$\in\{O\}$

Alors $h(H)=O$

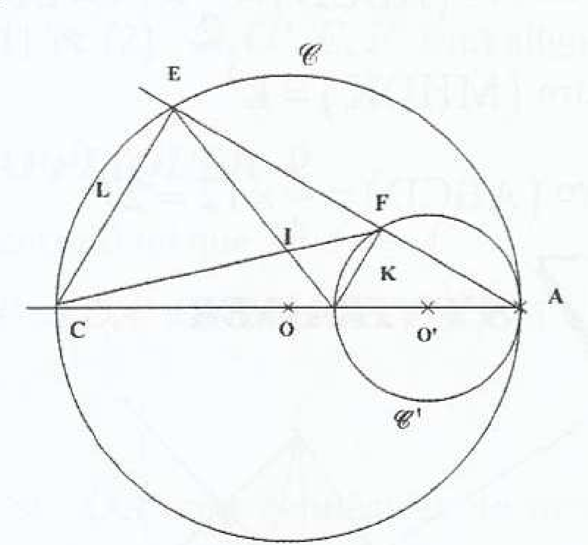
Or G est le centre de h alors O , G et H sont alignés.



S'ENTRAINER

les cercles $\mathscr{C}(O,5)$ et $\mathscr{C}'(O',2)$.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents intérieurement en A .la droite (OO') recoupe $\mathscr{C}$ en C et $\mathscr{C}'$ en B

1) Figure



2) $h(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$ alors $h(O) = O'$ et $r' = |k|r$ d'où

$\overrightarrow{AO'} = k\overrightarrow{AO}$ et $2 = 5|k|$

or $\overrightarrow{AO'}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires et de même sens alors k>0 alors $k = \frac{2}{5}$

3) E un point variable de $\mathscr{C}$ distincts de A et C , la droite (AE) recoupe $\mathscr{C}'$ en F.

a) h(E)= F ?

On a $E \in \mathscr{C} \cap (AE)$ alors $h(E) \in h(\mathscr{C}) \cap h((AE))$

alorsh(C) $\in C' \cap (AE)$

$\in \{A,F\}$

Or h(A)= A et A$\neq$ E alors h(E) $\neq$ A

Alors h(E) = F

b) On a $C \in \mathscr{C} \cap (AC)$

alors $h(C) \in h(\mathscr{C}) \cap h((AC))$

$\in C' \cap (AC)$

$\in \{A,B\}$

Or h(A)= A et C$\neq$ A alors h(C) $\neq$ A d'où h(C) = B

Conclusion : h(C) = B et h(E) =F alors (EC)//(FB)

c) * h(C) = B et h(E) =F alors BF = $|k|$ EC alors

alors $|k| = \frac{BF}{EC} = \frac{2}{5}$ alors $k = \frac{2}{5}$

* On a l'image du triangle AEC par h est le triangle ABF alors $Aire(ABF) = k^2 Aire(AEC)$

Alors $\frac{Aire(AEC)}{Aire(ABF)} = \frac{1}{k^2} = \frac{25}{4}$

4) a) Montrons que $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{7}\overrightarrow{BE}$

Dans le triangle IEC on a : $F \in (IC)$, $B \in (IE)$ et (EC)//(BF)

D'après le théorème de Thalès on a $\frac{IB}{IE} = \frac{BF}{EC}$ alors $\frac{IB}{IE} = \frac{2}{5}$ d'où $IB = \frac{2}{5}IE$

alors $IB = \frac{2}{5}(BE - IB)$ alors $BI = \frac{2}{7}BE$

On a les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\frac{2}{7}\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires et de même sens et $BI = \frac{2}{7}BE$ alors $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{7}\overrightarrow{BE}$

alors h'(E)=I

b) On a E varie sur le cercle $\mathscr{C}$ privé de A et C alors I varie sur h'($\mathscr{C}$) privée de h'($\mathscr{C}$) et h'(A) avec h'($\mathscr{C}$) est le cercle de centre h'(O) et de rayon $\frac{2}{7} \times 5 = \frac{10}{7}$

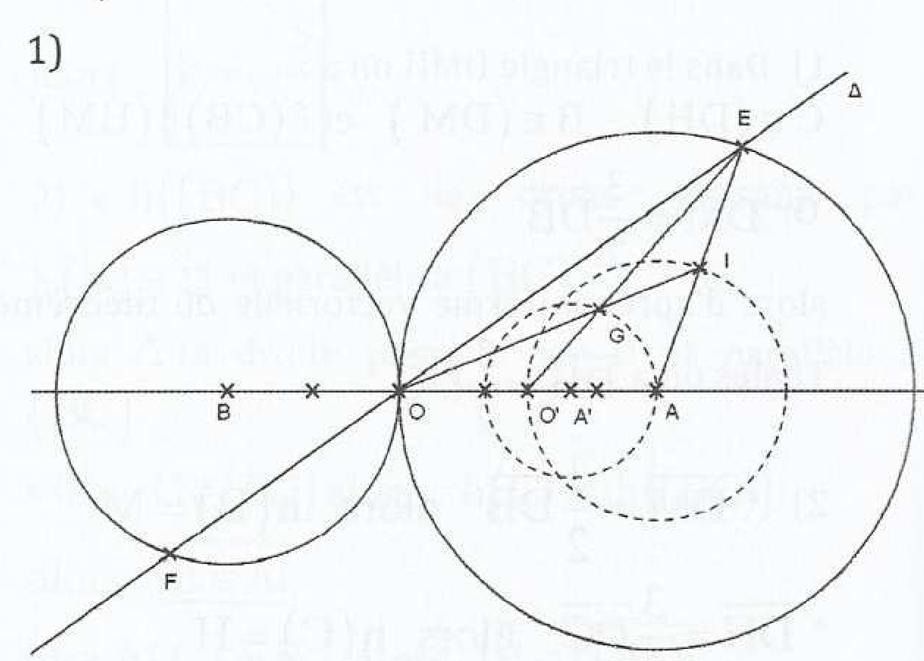
5) K le milieu de [BF] et L le milieu de [EC].

On a : L =C*E alors h(L) =h(C)*h(E) alors h(L)= B*F alors h(L) = K comme A est le centre de h alors A,K et L sont alignés.



S'ENTRAINER

1)



$\zeta(A,3)$, $\zeta'(B,2)$

$AB = 5$ et $r + r' = 3 + 2 = 5$ d'où $AB = r + r'$

Alors les deux cercles ζ et ζ' sont tangents extérieurement en O.

2/ $h(\zeta) = \zeta'$ alors $h(A) = B$ alors $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$

alors $OB = |k|OA$ alors $|k| = \frac{OB}{OA}$

Or $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont de sens contraires alors $k<0 \Rightarrow k=-\frac{OB}{OA}=-\frac{2}{3}$

3) On a : $\{E\} \in \zeta \cap (OE)$

alors $h(E) \in h(\zeta) \cap h((OE))$

alors $h(E) \in \zeta' \cap (OE) = \{O,F\}$

alors $h(E) \in \{O,F\}$ alors h(E) =O où h(E) =F

Or $h(O)=O$ alors $h(E)=F$.

4) a) On a : $AI=\frac{1}{2}AF=\frac{3}{2}$

Lorsque Δ varie, le point I varie sur le cercle $\zeta''\left(A,\frac{3}{2}\right)$

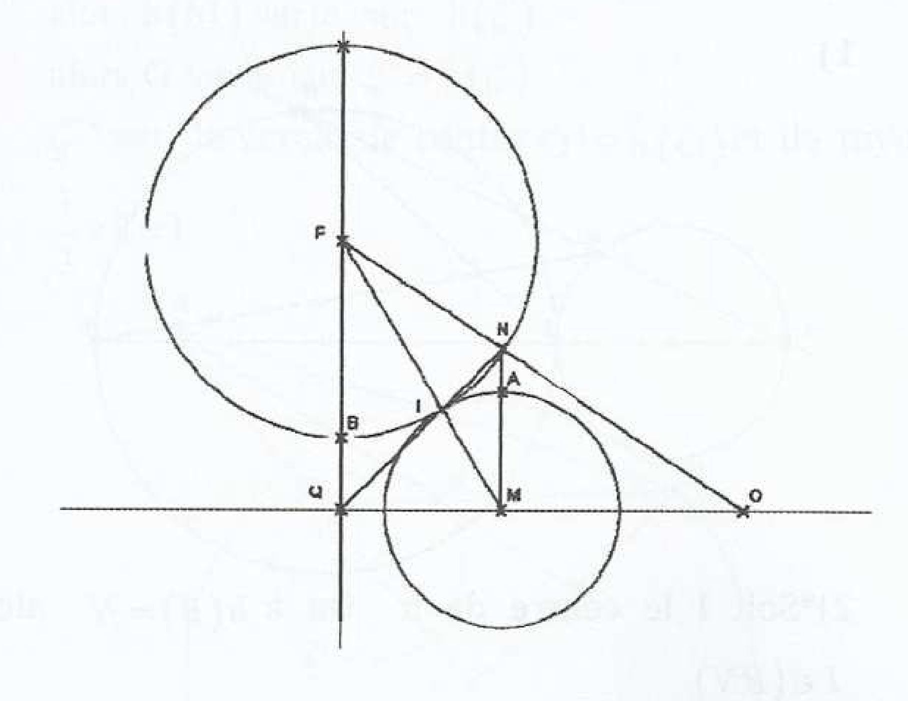
b) On a : G est le cercle de gravité de OAE et $O'=O*A$

Alors $\overrightarrow{O'G}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}$ alors $h_{\left(O',\frac{1}{3}\right)}(E)=G$

On a E varie sur $\zeta(A,3)$ alors G varie le cercle $\zeta_1(A',1)$ l'image de ζ par $h_{\left(O',\frac{1}{3}\right)}$.

où $A'=h_{\left(O',\frac{1}{3}\right)}(A)$

11 S'ENTRAINER



1) On a $(MN)\perp(OM)$ et $(PQ)\perp(OM)$ Alors $(MN)//(PQ)$

2)a) L'image de la droite (MN) par h est la droite passant par $h(N)=P$ et parallèle par (MN) d'où $h((MN))=(PQ)$

b) on a : $M\in(OM)\cap(MN)$ alors : $h(M)\in h((OM))\cap h((MN))$

$\in(OM)\cap(QP)$ $\in\{Q\}$ D'où $h(M)=Q$

2ème Méthode :

Dans le triangle OPQ on a :

$$\begin{cases} M\in(OQ) \\ N\in(OP) \\ (MN)//(PQ) \end{cases}$$

On a $\overrightarrow{OP}=\frac{5}{3}\overrightarrow{ON}$

Alors d'après la forme vectorielle de théorème de Thalès on a : $\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{OM}$ D'où $h(M)=Q$

2) * On a $\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{OM}$ alors $OQ=\frac{5}{3}OM=\frac{5}{3}\times 4{,}5$ $=7{,}5$

* $h(M)=Q$ et $h(N)=P$

alors $PQ=\frac{5}{3}MN=\frac{5}{3}\times 3=5$

3/ $h'(M)=P$ alors $I\in(MP)$

$h'(N)=Q$ alors $I\in(NQ)$

Donc $\{I\}=(MP)\cap(NQ)$

$\left.\begin{matrix} h'(M)=P \\ h(N)=Q \end{matrix}\right\}$ alors $\overrightarrow{PQ}=k\,\overrightarrow{MN}$

Or $h(M)=Q$ et $h(N)=P$

alors $\overrightarrow{QP}=\frac{5}{3}\overrightarrow{MN}$ alors $\overrightarrow{PQ}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{MN}$

Donc $k=-\frac{5}{3}$

4) $\zeta(I,IM)$ $\zeta'(P,JP)$

On a ζ de centre M et passant par I donc $h'(\zeta)$ est le cercle de centre $h'(M)=P$ et passant par $h'(I)=I$ alors $h'(\zeta)=\zeta'$

b) On a : $A\in[MN]\cap\zeta$

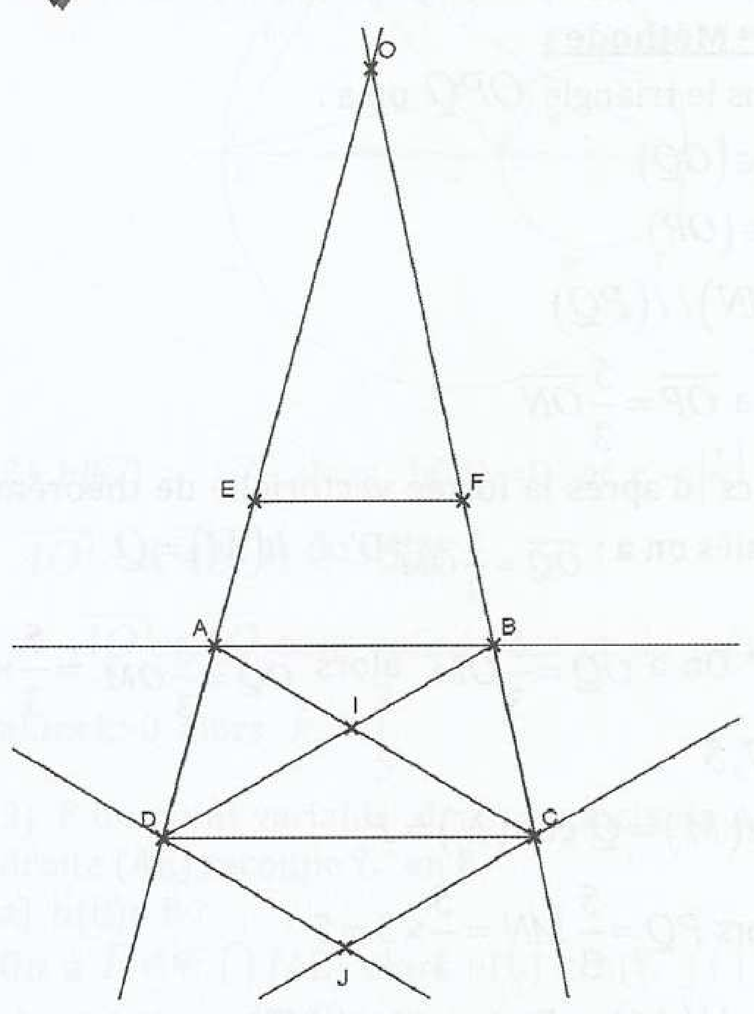
donc $h'(A) \in h'([MN]) \cap h'(\zeta)$

donc $h'(A) \in [PQ] \cap \zeta' \in \{B\}$

Donc $h'(A) = B$ or I centre de h' alors I, A et B sont aligné.



12 SE PERFECTIONNER



1) Si $h'(A) = B$ et $h'(D) = C$ alors $(AD)//(BC)$

Impossible car (AD) et (BC) sont sécantes d'où h' n'existe pas.

2)a) $h(D) = A$ alors $O \in (AD)$

$h(C) = B$ alors $O \in (BC)$

Alors $\boxed{O \in (AD) \cap (BC)}$

b) $\left.\begin{array}{l} h(D) = A \\ h(C) = B \end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$

On a : $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

Alors $\boxed{k = \frac{3}{4}}$

c)

d) On a: $h(A) = E$ et $h(B) = F$

On a : $h(ABCD) = EFBA$

Alors : $Aire(EFBA) = k^2\, Aire(ABCD)$

Alors : $Aire(EFBA) = \frac{9}{16} Aire(ABCD)$

3)On a : $J \in (JC) \cap (JD)$

Alors : $h(J) \in h((JC)) \cap h((JD))$

* $h((JC))$ est la droite parallèle à (JC) et passant par $h(C) = B$ Alors : $h((JC)) = (DB)$

* $h((JD))$ et la droite parallèle à (JD) et passant par $h(D) = A$

Alors : $h((JD)) = (AC)$

D'où : $h(J) \in (DB) \cap (AC)$

$\in \{I\}$ D'où $\boxed{h(J) = I}$

Comme O est le centre de h

Alors O, I,J sont alignés.

4) $\overline{DM} = \frac{x^2}{2x^2+1}\overline{DC}$ alors $M \in [DC]$ car $\frac{x^2}{2x^2+1} \in [0,1]$

On a : $M \in (OM) \cap (DC)$

Alors $h(M) \in h((OM)) \cap h((DC))$

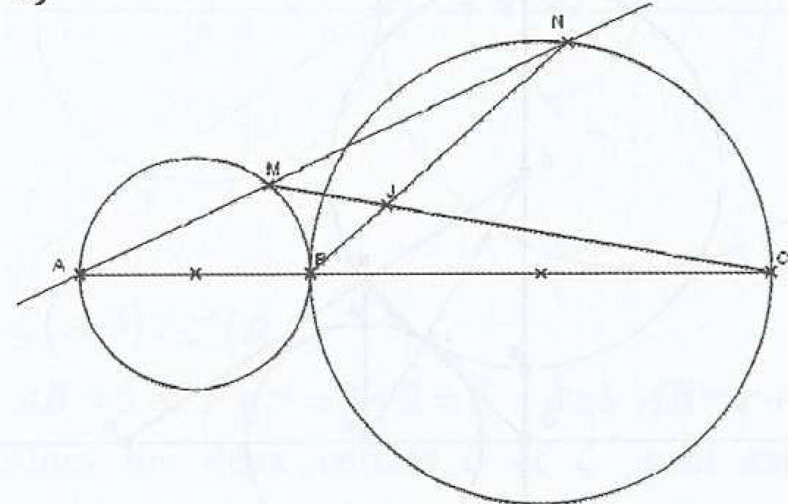
$\in (OM) \cap (AB)$

$\in \{N\}$ Alors $\boxed{h(M) = N}$



13 SE PERFECTIONNER

1)



2)*Soit I le centre de h On a $h(B) = N$ alors $I \in (BN)$

$h(M) = C$ alors $I \in (MC)$

Alors $\{I\} = (BN) \cap (MC)$

D'où $J = I$

*Soit k le rapport de h

$\left.\begin{matrix} h(B)=N \\ h(M)=C \end{matrix}\right\}$ alors (CN)//(MB) , et $\overrightarrow{CN}=k\overrightarrow{MB}$

Dans le triangle ANC on a : M $\in$(AN) , B $\in$(AC) et (CN)//(MB),

D'après le théorème de Thalès $\frac{AB}{AC}=\frac{MB}{CN}$ D'où

$\frac{2}{6}=\frac{1}{|k|}$ ⇒ alors $|k|=3$

Or $\overrightarrow{CN}=k\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont de sens contraires alors $k<0$ d'où $k=-3$.

3/ On a : $h(B)=N$ alors $\overrightarrow{JN}=-3\overrightarrow{JB}$ alors

$\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BN}=-3\overrightarrow{JB}$ alors $\overrightarrow{BN}=-4\overrightarrow{JB}$

alors $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BN}$

D'où h' est l'homothétie de centre B et de rapport $k=\frac{1}{4}$



14 SE PERFECTIONNER

Soit $I=O*A$

on a I est un point fixe

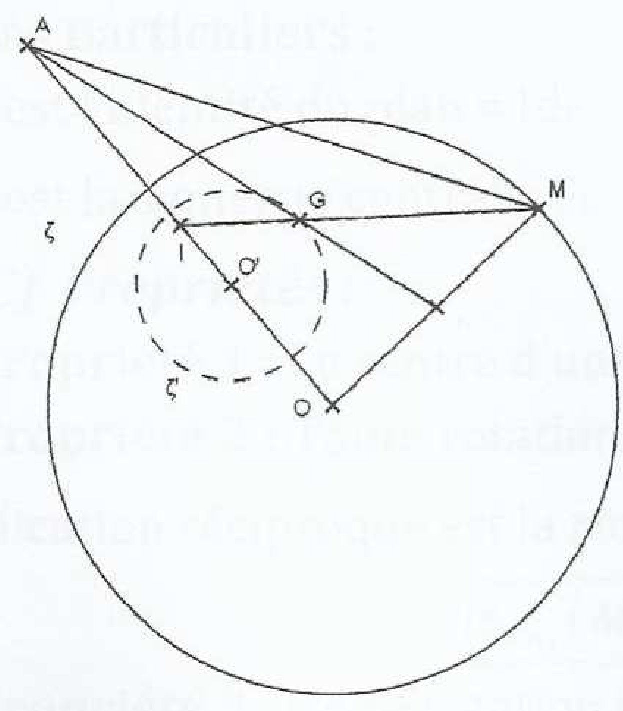
On a $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$ alors : $h_{\left(I,\frac{1}{3}\right)}(M)=G$

On a M varie sur ζ

alors $h(M)$ varie sur $h(\zeta)$

alors G varie sur $\zeta'=h(\zeta)$

ζ' est le cercle de centre $O'=h(O)$ et de rayon $\frac{1}{3}\times 3=1$





15 SE PERFECTIONNER

$M\in D$, $N\in\Delta$

On a $3\overrightarrow{AM}+8\overrightarrow{NA}=\vec{0}$ alors $\overrightarrow{AM}=\frac{8}{3}\overrightarrow{AN}$

alors :

$h_{\left(A,\frac{8}{3}\right)}(M)=N$

On a : $M\in D$ alors $h(M)\in h(D)$ alors $N\in h(D)$

alors $N\in D'$ où $D'=h(D)$

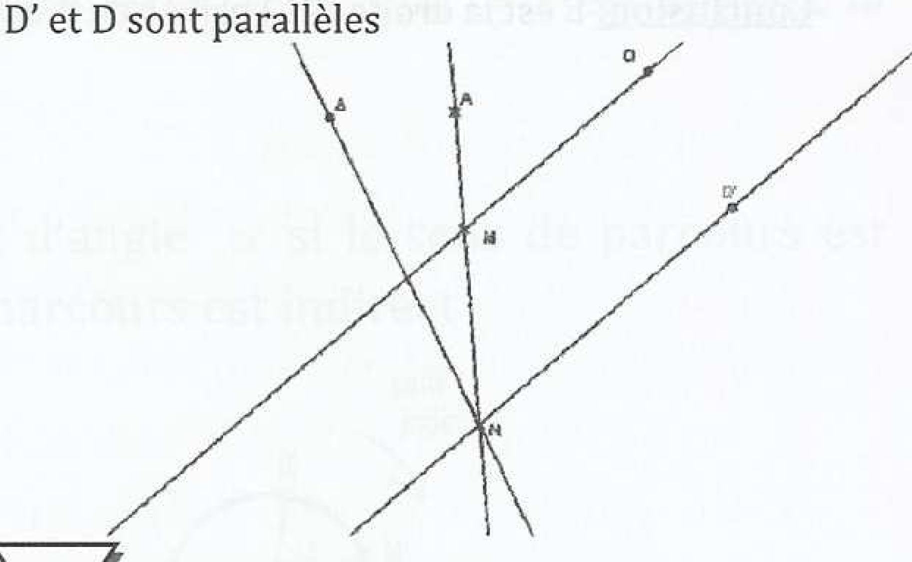
D'autre part $N\in\Delta$ alors $N\in\Delta\cap D'$

Construction :

- On construite $D'=h(D)$
- D' coupe Δ en N
- On construit la droite (AN) qui coupe D en M

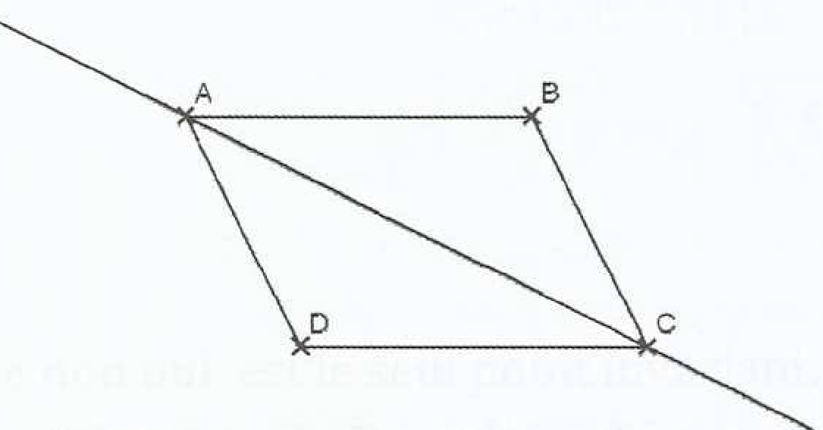
Remarque :

D' et Δ sont sécantes car Δ et D sont sécantes et D' et D sont parallèles





16 SE PERFECTIONNER



- Si $I\in E$ alors I est le centre d'une homothétie h tel que $h((AB))=(CD)$ et $h((AD))=(BC)$

On a

$A\in(AB)\cap(AD)$ alors $h(A)\in h((AB))\cap h((AD))$

Alors $h(A) \in (CD) \cap (BC)$

Alors $h(A) \in \{C\}$

Alors h(A) =C alors $I \in (AC)$

On a $I \neq A$ et $I \neq C$ car si non $h((AB)) \neq (CD)$

Alors E est la droite(AC) privée de A et C.

• Réciproquement soit M' est un point de (AC) privée de A et C.

Montrons que I est le centre d'une homothétie h tel que $h((AB)) = (CD)$ et $h((AD)) = (BC)$

Soit l'homothétie h de centre I et tel que $h(A) = C$

* On a $h((AB))$ est la droite passant par $h(A) = C$ et parallèle à (AB) alors $h((AB)) = (AC)$

* On a $h((AD))$ est la droite passant par $h(A) = C$ et parallèle à (AD)

alors $h((AD)) = (BC)$

d'où la droite (AC) privée de A et C est incluse dans E.

Conclusion: E est la droite (AC) privée de A et C

Rotation

I) Résumé du cours

A) Le radian :

Le radian est une unité des angles on la note rad on a : $180° = \pi\ rad$

Si α et β sont les mesures d'un même angle respectivement en degré et en radian alors $\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi}$

B) Définition d'une rotation:

1)Définition :

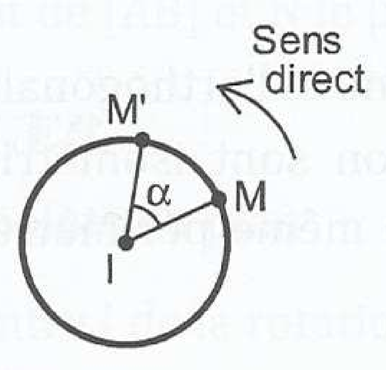
Soient I un point du plan et α un réel donné de $[0,\pi]$.L'application r de P dans P tel que :

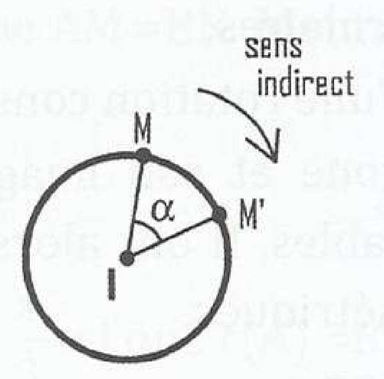
*r(I) =I

* Pour tout point M de P \ {I} r(M) =M' signifie $IM = IM' et\ \widehat{MIM'} = \alpha$ est appelée la rotation de centre I d'angle α.

Elle est notée $r_{(I,\alpha)}$.

Il s'agit d'une rotation directe de centre I et d'angle α si le sens de parcours est directet d'une rotation indirecte si le sens de parcours est indirect





2)Cas particuliers :

$r_{(I,0)}$ est l'identité du plan = Id_P

$r_{(I,\pi)}$ est la symétrie centrale S_I.

C) Propriétés :

◈ **Propriété 1 :** Le centre d'une rotation d'angle non nul est le seul point invariant.

◈ **Propriété 2 :** Toute rotation $r_{(I,\alpha)}$ de P est une bijection de P sur lui-même et son application réciproque est la rotation $r_{(I,-\alpha)}$.

$$r_{(I,\alpha)}(M) = M' \text{ signifie } r_{(I,-\alpha)}(M') = M$$

◈ **Propriété 3:** Toute rotation du plan converse les distances.

◈ **Propriété 4:**Toute rotation conserve les écarts s angulaires

Si r(A)=A’, r(B)=B’ et r(C)=C’ on a $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$

◈ **Propriété 5:**Toute rotation du plan conserve l’alignement, les milieux, les barycentres

Remarque :

Si $r_{(I,\alpha)}(M)=M'$ alors IM =IM’ alors le centre I de r appartient à la médiatrice de [MM’]

D) Images de figures simples par une rotation :

Une rotation r du plan transforme :

- Une droite en une droite.
  (Si D une droite et A et B deux points distincts de D. L’image de la droite D par une rotation r est la droite (A'B') ; où A' = r(A) et B' = r(B))
- Un segment [AB] en un segment [A'B'] avec A' = r(A) et B' = r(B).
- Une demi-droite en une demi-droite.
- Un cercle en un cercle qui lui est isométrique.

Remarques :

- Si l’angle de la rotation est $\frac{\pi}{2}$ alors l’image d’une droite est une droite qui luiest perpendiculaire
- Les images de deux parallèles par une rotation sont deux droites parallèles.
- Les images de deux perpendiculaires par une rotation sont deux droites perpendiculaires.
- On dit qu’une rotation conserve le parallélisme et l’orthogonalité.
- Un polygone et son image par une rotation sont isométriques ou encore superposables. Il ont alors le même aire, le même périmètre et leurs angles sont isométriques.

II)Exercices



Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et direct.On pose I = B * C

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB] et $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre [AC] .

Soit *r* la rotation de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que $\mathscr{C}' = r(\mathscr{C})$.
2) Montrer que $I \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}''$
3) La droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite (AI) recoupe $\mathscr{C}$ en M. Montrer que r(M) = I.

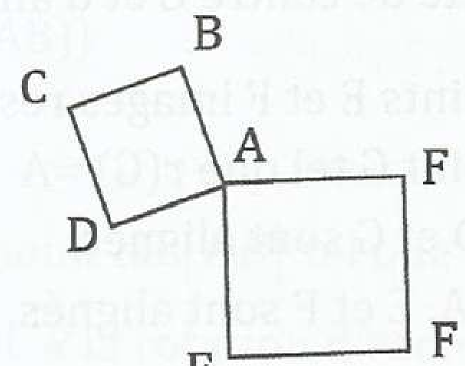


APPLIQUER

ABC est un triangle de sens direct. On construit à l'extérieurs de ABC les points *M* et *N* tels que *AMB* et *ANC* soit équilatéraux. Démontrer que $MC = NB$.



APPLIQUER



ABCD et AEFG sont deux carrés directs
Montrer que EB =DG et (EB) $\perp$ (DG)
(On pourra considérer une rotation)



APPLIQUER

Soit *ABCD* un carré de centre *O* de sens direct. Soient *I* le symétrique de *A* par rapport à *B* et *J* le symétrique de *D* par rapport à *A*. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer r(D) et r(A).
2) Démontrer que *OIJ* est un triangle rectangle isocèle en *O*.



APPLIQUER

Soit ABC un triangle direct et isocèle en B
1) Déterminer le centre I de la rotation direct r tel que r(A) =B et r (B) = C.
2) Soit M un point de [AB] et N le point de [BC] tel que AM =BN Montrer que r(M) = N



APPLIQUER

Soit A et B deux points du plan
Déterminer le centre I de la rotation direct r d'angle $\frac{\pi}{3}$ tel que r(A) =B.



APPLIQUER

Soit [BC] un segment du plan et soit r la rotation indirect de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Construire A l'image de B par r
2) Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et soit M un point de l'arc $\widehat{[BC]}$ ne contenant pas A et distinct de B et C. Soit D $\in [MA]$ tel que MD =MC
   a) Déterminer r(C).
   b) Montrer que r(M)=D
   c) Montrer que MA =MB+MC



8 S'ENTRAINER

Soit ABCD un carré et direct

Soit r la rotation directe de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) a)Construire les points E et F images respectives de D et B par la rotation r

   b) Construire le point G tel que r(G) =A

2) a) Montrer que B, D et G sont alignés

   b) En déduire que A, E et F sont alignés.



9 S'ENTRAINER

Soit D et Δ deux droites strictement parallèles du plan orienté. et soit A un point qui n'appartient ni à D ni à Δ.Construire un triangle ABC rectangle isocèle en A de sens direct tel que $B \in D$ et $C \in \Delta$.



10 S'ENTRAINER

Soit ABC un triangle direct et M un point variable de [BC] et AMP un triangle équilatéral direct

1) Faire une figure
2) Quel est l'ensemble des points P lorsque M varie ?



11 S'ENTRAINER

ABCD est un carré indirect. E milieu de $[CD]$ et $(AE)\cap(CB)=\{F\}$. La perpendiculaire Δ à (AE) en A coupe (CD) en G et (CB) en H. On considère le quart de tour direct r de centre A.

1) Déterminer $r(D), r((DC))$ et $r(\Delta)$
2) Montrer que $r(G)=F$
3) Montrer que le triangle AEH est rectangle isocèle
4) Que représente E pour le triangle HFG



12 S'ENTRAINER

ABC un triangle rectangle en A de sens direct tel que $AB=5, \widehat{ABC}=\frac{\pi}{6}$ et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit de centre O. La médiatrice Δ de $[AC]$ coupe l'arc $\left[\overset{\frown}{BC}\right]$ ne contenant pas A en un point I. On désigne par R la rotation indirecte de centre I et d'angle $\frac{\pi}{6}$

1) Montrer que $R(A)=C$ puis construire $C'=R(C)$
2) a) Montrer que $\widehat{C'CI}=\widehat{CAI}$
   b) En déduire que $(CC')\perp(BC)$

3) Déterminer r((AC)) et en déduire r((AB))



13 S'ENTRAINER

ABCD un carré direct, on désigne par E le point de $[DB]$ tel que $DE=DA$. On note I et J les milieux respectifs de $[AE]$ et $[CE]$. Soit R la rotation directe de centre D et d'angle $\frac{\pi}{4}$

1) Déterminer $R(A), R(E)$ et $R(I)$
2) Montrer que le triangle EIJ est isocèle
3) Construire le point $F=R(B)$ et montrer que $(DE)\perp(EF)$.



14 SEPERFECTIONNER

Soit ABC un triangle rectangle en A de sens direct et tel que $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{6}$. On construit à l'extérieur du triangle ABC les triangles équilatéraux ABI et BCJ . Soit K le milieu de $[CJ]$. On note R la rotation directe de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Déterminer $R(A)$ et $R(J)$
2) Montrer que $R(K)=A$
3) Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre J et passant par K et $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre C et passant par K
   Montrer que $R(\mathscr{C}_1)=\mathscr{C}_2$



15 SEPERFECTIONNER

Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, I= A*B et J= B*CSoit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1) Montrer que r(A) = B
2) Déterminer r(B) et en déduire r((AB))
3) Montrer que r(I) =J
4) Déterminer r(C)

5) A l'extérieur de ce triangle On construit un triangle équilatéral direct ACD

a) Déterminer r(C).

b) En déduire r((CD))



16 SEPERFECTIONNER

On considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et $D = S_{(AC)}(B)$.

Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ tel que : r(A) = C.

1)

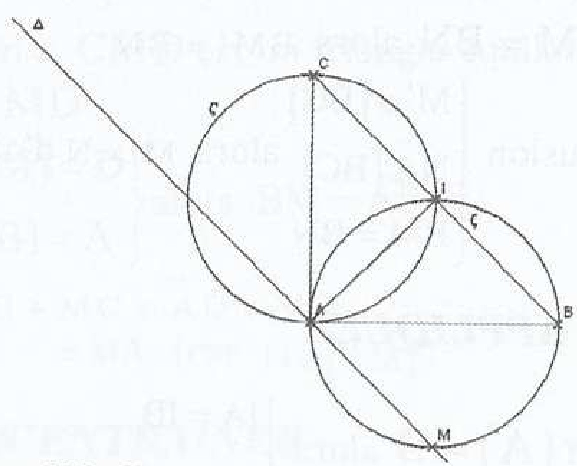
a) Montrer que D est le centre de r.

b) Soit $B' = r(B)$, montrer que le point C est le milieu du segment $[AB']$.

2) Soit M un point de la demi-droite [AB) et M' le point de $[CB')$ tel que $AM = CM'$.

Montrer que le triangle AMM' est équilatéral.

1 APPLIQUER



1) On a r(A)=A

- On a $\begin{cases} AB = AC \\ B\widehat{A}C = \frac{\pi}{2} \text{ dans le sens direct} \end{cases}$ alors r(B) = C

- On a ζ le cercle de diamètre $[AB]$ alors son image par r est le cercle de diamètre $r([AB]) = [AC]$ alors $r(\zeta) = \zeta'$

2) ABC est triangle isocèle en A et I=B*C alors (AI) est le diamètre de $[BC]$ alors $A\widehat{I}B = 90°$ et $A\widehat{I}C = 90°$

Alors $I \in \zeta$ et $I \in \zeta'$ alors $I \in \zeta \cap \zeta'$

3) On a $M \in \zeta \cap \Delta$ alors $r(M) \in r(\zeta) \cap r(\Delta)$

On a Δ passe par A alors $r(\Delta)$ est la droite passant par $r(A) = A$ et perpendiculaire à Δ alors $r(\Delta) = (AI)$

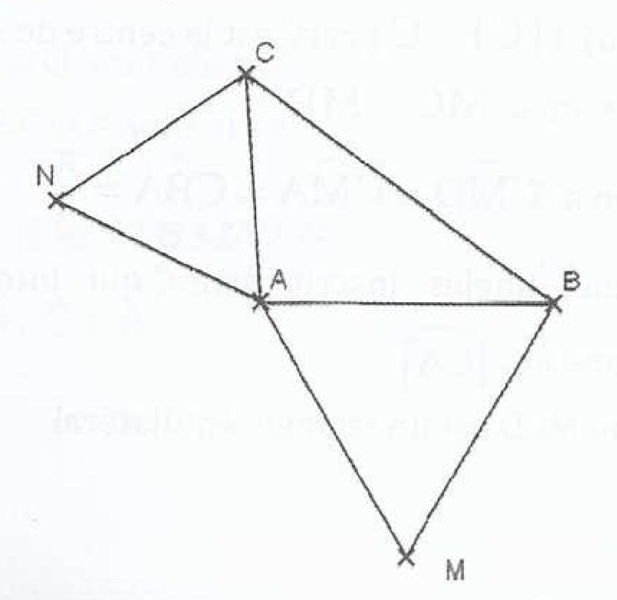
D'où $r(M) \in \zeta' \cap \Delta$ d'où $r(M) \in \{A, I\}$

d'où $r(M) = A$ ou $r(M) = I$

or $r(M) = A$ et $M \neq A$ alors $r(M) \neq A$ d'où $r(M) = I$.



2 APPLIQUER



Sens directe

r est la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

- On a $\begin{cases} AC = AN \\ C\widehat{A}N = \frac{\pi}{3} \text{ dans la sens directe} \end{cases}$ alors r(B) = C

- On a $\begin{cases} AM = AB \\ B\widehat{A}M = \frac{\pi}{3} \text{ dans la sens directe} \end{cases}$ alors r(M) = B

Conclusion :

$\left.\begin{matrix} r(C) = N \\ r(M) = B \end{matrix}\right\}$ alors CM = NB (car r conserve les distances)

3 APPLIQUER

Soit r la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

- On a $\begin{cases} AB = AB \\ B\widehat{A}D = \frac{\pi}{2} \text{ dans la sens directe} \end{cases}$ alors r(B) = D

- On a $\begin{cases} AE = AG \\ E\widehat{A}G = \frac{\pi}{2} \text{ dans la sens directe} \end{cases}$ alors r(E) = G

Conclusion :

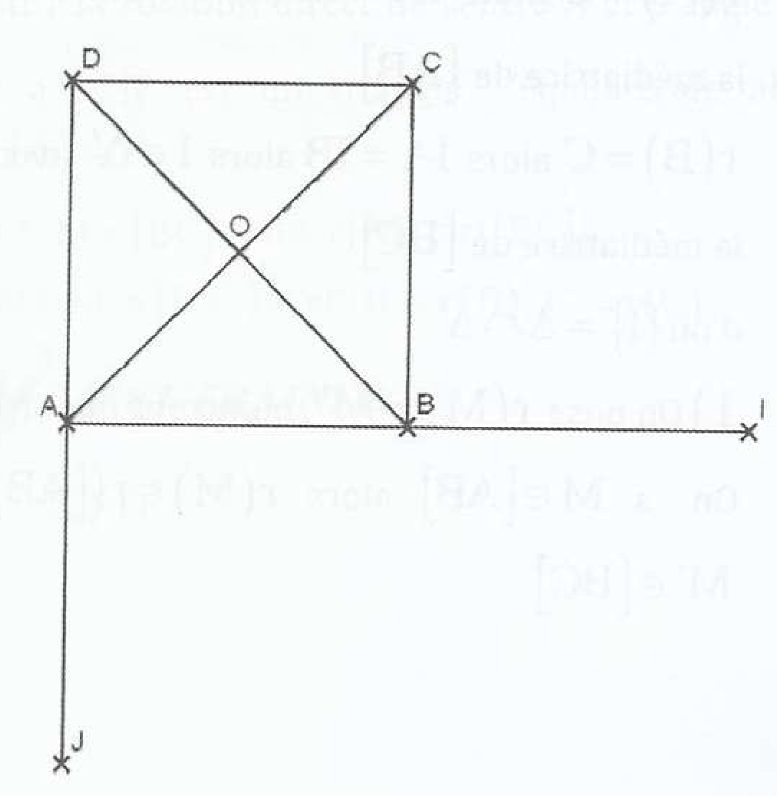
$\left.\begin{matrix} r(B) = D \\ r(E) = G \end{matrix}\right\}$ alors BE = DG et $r((BE)) = (DG)$

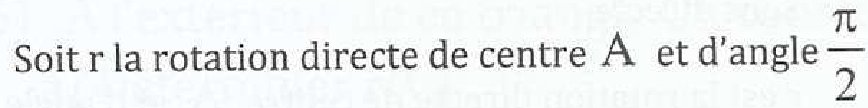
D'où $(BE) \perp (DG)$ car l'image d'une droite par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

Est une droite qui lui est perpendiculaire.



4 APPLIQUER





Soit r la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) On a $\begin{cases} AD = OA \\ D\hat{O}A = \frac{\pi}{2} \text{ dans la sens directe} \end{cases}$ alors $r(D) = A$

- On a $\begin{cases} OA = OB \\ A\hat{O}B = \frac{\pi}{2} \text{ dans la sens directe} \end{cases}$ alors $r(A) = B$

2) Il suffit de montrer que $r(J) = (I)$

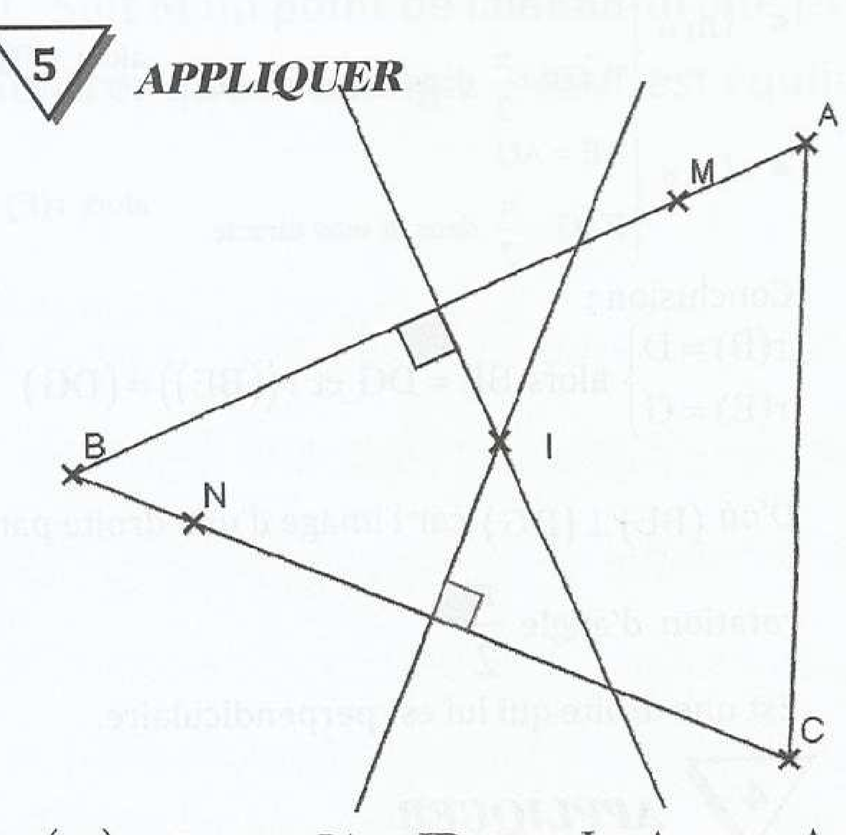
On a $A = D * J$ alors $r(A) = r(D) * r(J)$ car r conserve le milieu Alors $B = A \times r(J)$

or $B = A * I$ alors $r(J) = I$

On a r(J)= I alors $OI = OJ$ et $J\hat{O}I = \frac{\pi}{2}$

D'où OIJ est un triangle rectangle et isocèle en O

5 APPLIQUER



$r(A) = B$ alors $IA = IB$ alors $I \in \Delta$ avec Δ est la médiatrice de $[AB]$

$r(B) = C$ alors $IA = IB$ alors $I \in \Delta'$ avec Δ' est la médiatrice de $[BC]$

d'où $\{I\} = \Delta \cap \Delta'$

1) On pose $r(M) = M'$, montrons que $M' = N$

On a $M \in [AB]$ alors $r(M) \in r([AB])$ alors $M' \in [BC]$

On a $\begin{cases} r(A) = B \\ r(M) = M' \end{cases}$ alors $AM = BM'$

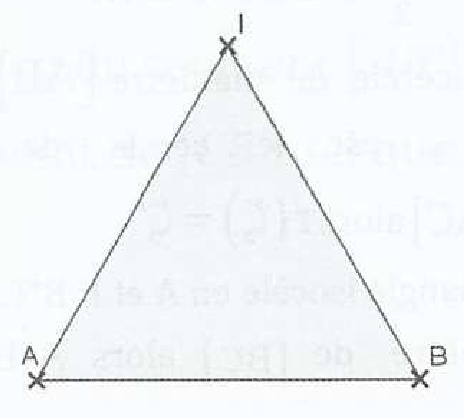
Or $AM = BN$ alors $BM' = BN$

Conclusion $\begin{cases} M' \in [BC] \\ N \in [BC] \\ BM = BN \end{cases}$ alors $M' = N$ d'où $r(M) = N$

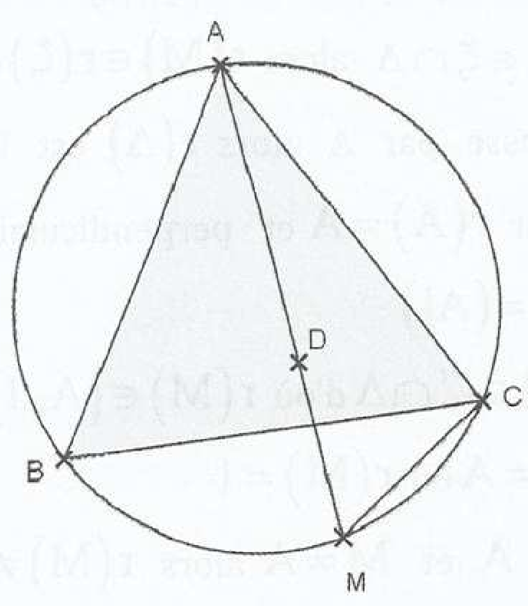
6 APPLIQUER

On a $r(A) = B$ alors $\begin{cases} IA = IB \\ A\hat{I}B = \frac{\pi}{3} \text{ dans la sens directe} \end{cases}$

Alors IAB est un triangle équilatéral direct



7 APPLIQUER



1) $r(B) = A$ alors $CA = CB$ et $B\hat{C}A = \frac{\pi}{3}$ dans le sens indirect.

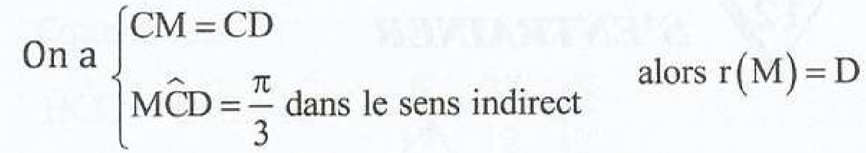
2) a) $r(C) = C$ (carC est le centre de r)

b) ✻ on a $MC = MD$

✻on a $C\widehat{M}D = C\widehat{M}A = C\widehat{B}A = \frac{\pi}{3}$

(deux angles inscrit dans ζ qui interceptent le même arc $\widehat{[CA]}$

D'où MCD est un triangle équilatéral



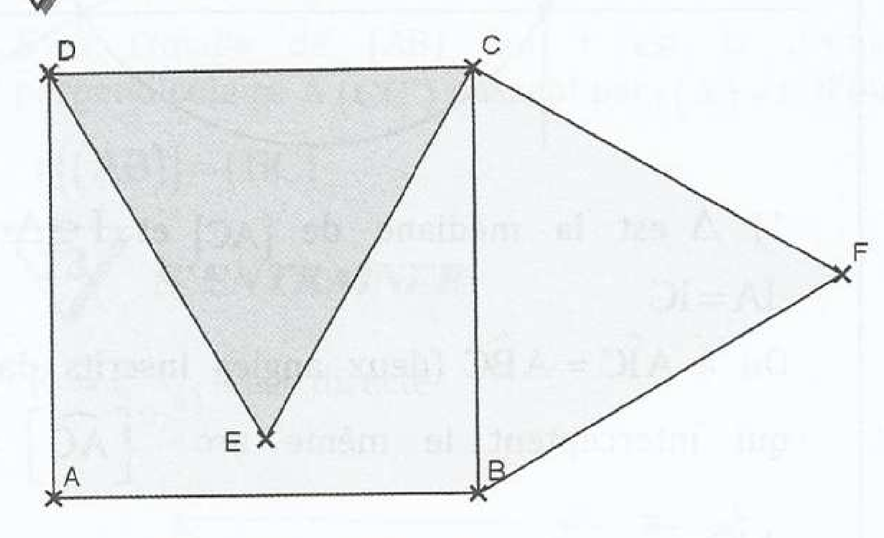
On a $\begin{cases} CM = CD \\ M\hat{C}D = \frac{\pi}{3} \text{ dans le sens indirect} \end{cases}$ alors $r(M) = D$

c) On a CMD est un triangle équilatéral alors $MC = MD$

on a $\left.\begin{matrix} r(M) = D \\ r(B) = A \end{matrix}\right\}$ alors $BM = AD$

d'où $MB + MC = AD + MD$
$= MA$ (car $D \in [AM]$)

8 S'ENTRAINER



1) a) $r(D) = E$; $r(B) = F$

b) $r(G) = A$

2) a) $r(G) = A$ alors $CG = CA$ et $G\hat{C}A = \frac{\pi}{3}$

car dans le sens direct
alors ACG est un triangle équilatéral
alors $GA = GC$
alors G appartient à ma médiatrice de $[AC]$
alors $G \in (BD)$
alors B,D et G sont alignés
b) On a :

$\begin{cases} r(D) = E \\ r(B) = F \\ r(G) = A \\ D, B \text{ et } G \text{ sont alignés} \end{cases}$

Alors E,F et A sont alignés.



9 S'ENTRAINER

$B \in D$, $C \in \Delta$

Soit r la rotation direct de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

on a ABC est un triangle rectangle isocèle en A et direct alors $r(B) = C$

- on a $B \in D$ alors $r(B) \in r(D)$ alors $C \in r(D)$

soit $D' = r(B)$ alors $C \in \Delta \cap D'$

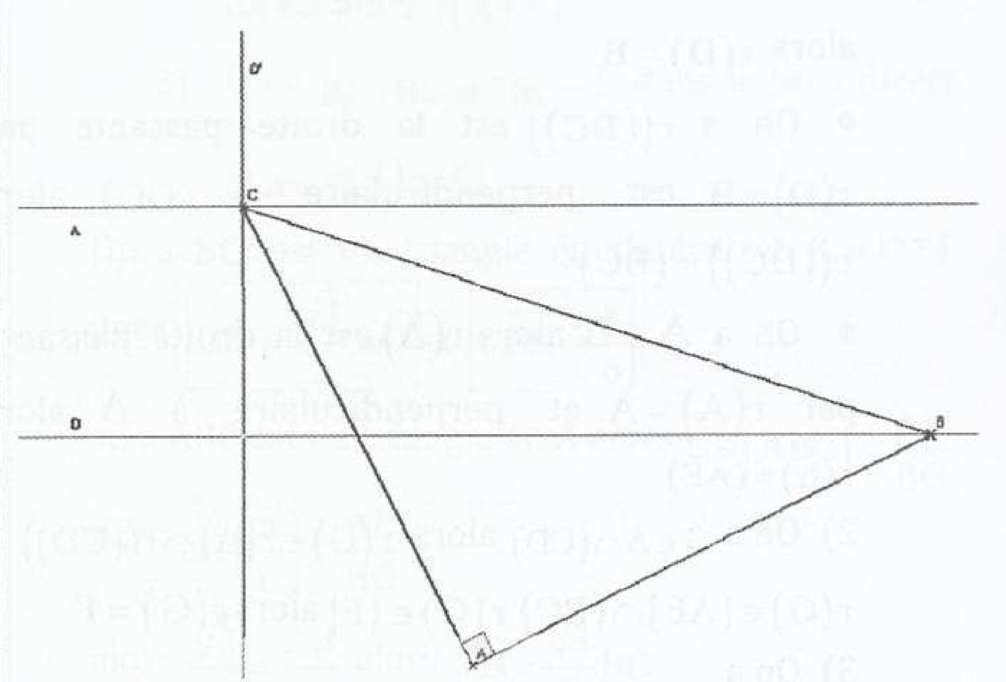
On a $\tau(D) = D'$ alors $D \perp D'$

On a $\Delta // D'$ alors $\Delta \perp D'$ alors Δ et D' sont sécantes en un point.

D'où $\{C\} = \Delta \cap D'$

Construction :

- On construit $D' = r(D)$
- D' coupe Δ en C
- La perpendiculaire à (AC) en A coupe D en B



10 S'ENTRAINER

Soit r la rotation direct de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

on a AMP est un triangle équilatérale alors $r(M) = P$

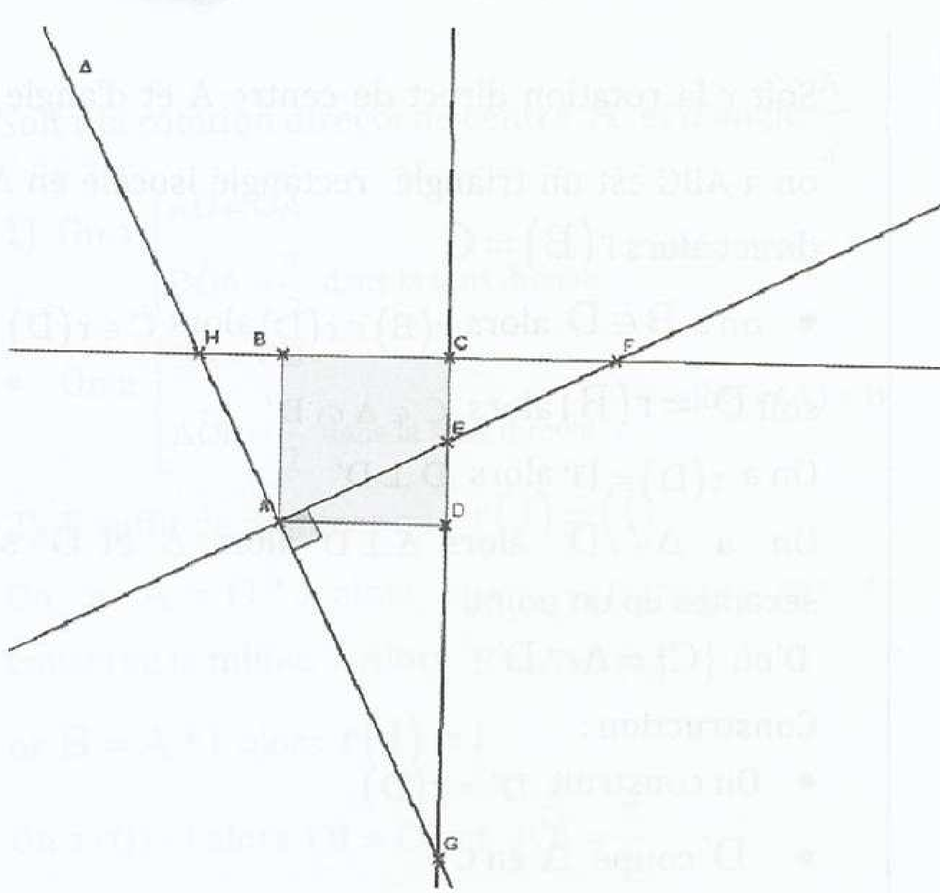
On a $M \in [BC]$ alors $r(M) \in r([BC])$

Alors $M' \in [B'C']$ avec $B' = r(B)$, $C' = r(C)$



11 S'ENTRAINER

$E = C * D$



1) On a $AD = AB$ et $\widehat{DAB} = \frac{\pi}{2}$ dans le sens direct alors $\tau(D) = B$

- On a $r((DC))$ est la droite passante par $r(D) = B$ est perpendiculaire à (DC) alors $r((DC)) = (BC)$.
- On a $A \in \Delta$ alors $r(\Delta)$ est la droite passante par $r(A) = A$ et perpendiculaire à Δ alors $r(\Delta) = (AE)$

2) On a $G \in \Delta \cap (CD)$ alors $r(G) \in r(\Delta) \cap r((CD))$
$r(G) \in (AE) \cap (BC)$ $r(G) \in \{F\}$ alors $r(G) = F$

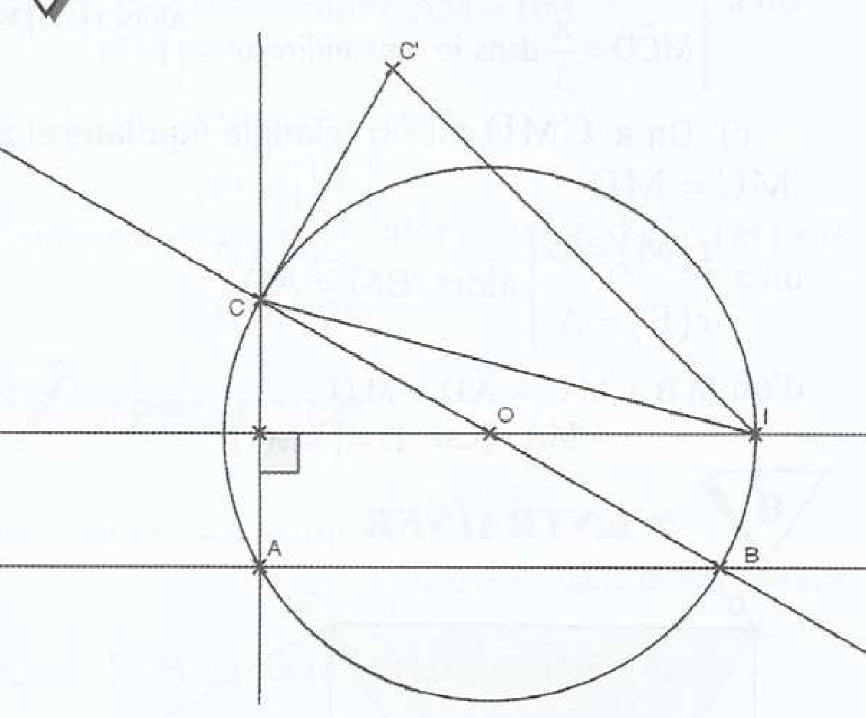
3) On a
$F \in (CD) \cap (AE)$ alors $r(E) \in r((CD)) \cap r((AE))$

- $r((CD)) = (BC)$
- $r((AE))$ est la droite passante par $r(E) = H$ est perpendiculaire à (AE) alors $r((AE)) = (AH)$ d'où $r(E) \in (BC) \cap (AH)$, $r(E) \in \{H\}$

alors $r(E) = \{H\}$ alors $AE = AH$ et $\widehat{EAH} = \frac{\pi}{2}$
alors AEH est un triangle rectangle et isocèle en H.

4) On a $(GE) \perp (HF)$ alors (GE) porte l'hauteur issue de G dans FGH.
On a $(FA) \perp (HG)$ alors (FA) porte l'hauteur issue de F dans FGHor $(GE) \cap (FA) = \{E\}$
alors E est l'orthocentre de FGH

12 S'ENTRAINER



1) Δ est la médiane de $[AC]$ et $I \in \Delta$ alors $IA = IC$

On a $\widehat{AIC} = \widehat{ABC}$ (deux angles inscrits dans ζ qui interceptent le même arc $[\widehat{AC}]$ alors $\widehat{AIC} = \frac{\pi}{6}$

On a
$\begin{cases} IA = IC \\ \widehat{AIC} = \frac{\pi}{6} \text{ dans le sens direct} \end{cases}$ alors $r(A) = C$

$C' = r(C)$ alors $\begin{cases} IC = IC' \\ \widehat{CIC'} = \frac{\pi}{6} \text{ dans le sens direct} \end{cases}$

2) a) $\left.\begin{matrix} r(I) = I \\ r(C) = C' \\ r(A) = C \end{matrix}\right\}$ alors $r(\widehat{CAI}) = \widehat{C'CI}$

alors $\widehat{CAI} = \widehat{C'CI}$ car r conserve les angles géométriques

b) • On a $IA = IC$ et $\widehat{AIC} = \frac{\pi}{6}$

alorsIACest un triangle isocèle en I d'où $2\widehat{C'CI} + \frac{\pi}{6} = \pi$ d'où $\widehat{C'CI} = \frac{5\pi}{12}$

Or $\widehat{CAI} = \widehat{C'CI}$ alors $\boxed{\widehat{CAI} = \frac{5\pi}{12}}$

• On a $\widehat{BCI} = \widehat{ACI} - \widehat{ACB} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$



Conclusion

$B\widehat{C}C' = B\widehat{C}I + I\widehat{C}C' = \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$

alors $(CC') \perp (BC)$

3) * On a :

$\left.\begin{matrix} r(A) = C \\ r(C) = C' \end{matrix}\right\}$ alors $r((AC)) = (CC')$

* On a $(AB) \perp (AC)$ alors $r((AB)) \perp r((AC))$

car r conserve l'orthogonalité alors $r((AB)) \perp (CC')$

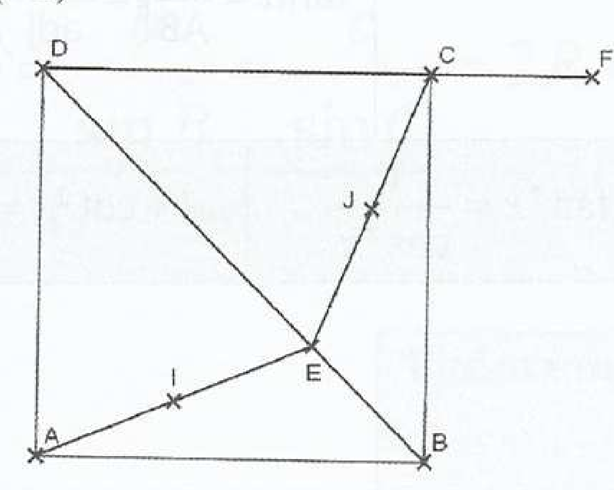
D'où l'image de (AB) par r est la droite perpendiculaire à (CC') passant par $r(A) = C$ d'où

$r((AB)) = (BC)$



13 S'ENTRAINER

$R = r_{\left(D, \frac{\pi}{4}\right)}$ R est directe



1)

- On a $DA = DE$ et $A\widehat{D}E = \frac{\pi}{4}$ dans le sens direct

alors $r(A) = E$

- On a $DE = DC$ et $E\widehat{D}C = \frac{\pi}{4}$ dans le sens direct

alors $r(E) = C$

- On a $I = A*E$ alors $r(I) = r(A)*r(E)$

alors $r(I) = E*C$, alors $r(I) = J$

2) $\left.\begin{matrix} r(A) = E \\ r(E) = C \end{matrix}\right\}$ alors $AE = EC$

Or $I = A*E$ et $J = C*E$ alors $EI = EJ$

alors EIJ est isocèle en E

2) $R(B) = F$ alors $DB = DF$ et $B\widehat{D}F = \frac{\pi}{4}$ dans le sens direct

$r(B) = E$ alors $DB = DF$

or $BD = \sqrt{2}AB$ alors $\boxed{DF = AB\sqrt{2}}$

- On a $\left.\begin{matrix} r(A) = E \\ r(B) = F \end{matrix}\right\}$ alors $AB = EF$

On a $DE^2 + EF^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2 = \left(\sqrt{2}AB\right)^2 = DF^2$

D'après la réciproque de théorème de Pythagore on a DEF est un triangle rectangle en E

alors $(DE) \perp (EF)$



14 SE PERFECTIONNER

1) On a $BA = BI$ et $A\widehat{B}I = \frac{\pi}{3}$ dans le sens direct alors $r(A) = I$

2) On a $BJ = BC$ et $J\widehat{B}C = \frac{\pi}{3}$ dans le sens direct alors $r(J) = C$

On a BCJ est un triangle équilatéral et $K = C*J$

alors $\boxed{BK = \frac{\sqrt{3}}{2}BC}$ et $\boxed{C\widehat{B}K = \frac{\pi}{6}}$

On a ABC est un triangle en A alors $\cos\left(A\widehat{B}C\right) = \frac{AB}{BC}$

alors $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{AB}{BC}$

alors $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{BC}$ alors $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$

Conclusion : on a $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$ et $BK = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$

alors $\boxed{BA = BK}$

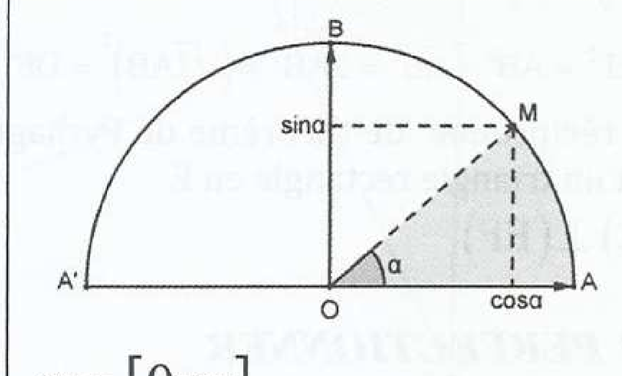
On a $K\widehat{B}A = K\widehat{B}C + C\widehat{B}A = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ d'ou $r(K) = A$

3) ζ_1 de centre J et de rayon AK alors $R(\zeta_1)$ est le cercle de centre $R(J) = C$ et de même rayon AK alors $R(\zeta_1) = \zeta_2$

Trigonométrie

I) Résumé de cours

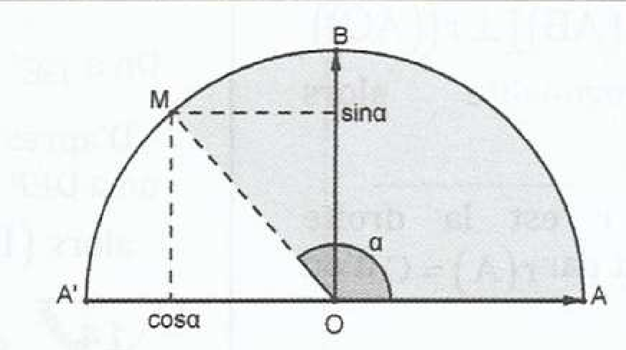
A) Définitions :



$\alpha \in [0;\pi]$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\alpha \in]0;\pi[$ $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

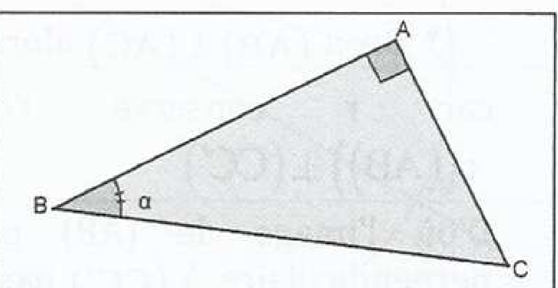


$\alpha \in [0;\frac{\pi}{2}]$ équivaut à

$(0 \leq \cos\alpha \leq 1)$

$\alpha \in [\frac{\pi}{2};\pi]$ équivaut à

$(-1 \leq \cos\alpha \leq 0)$



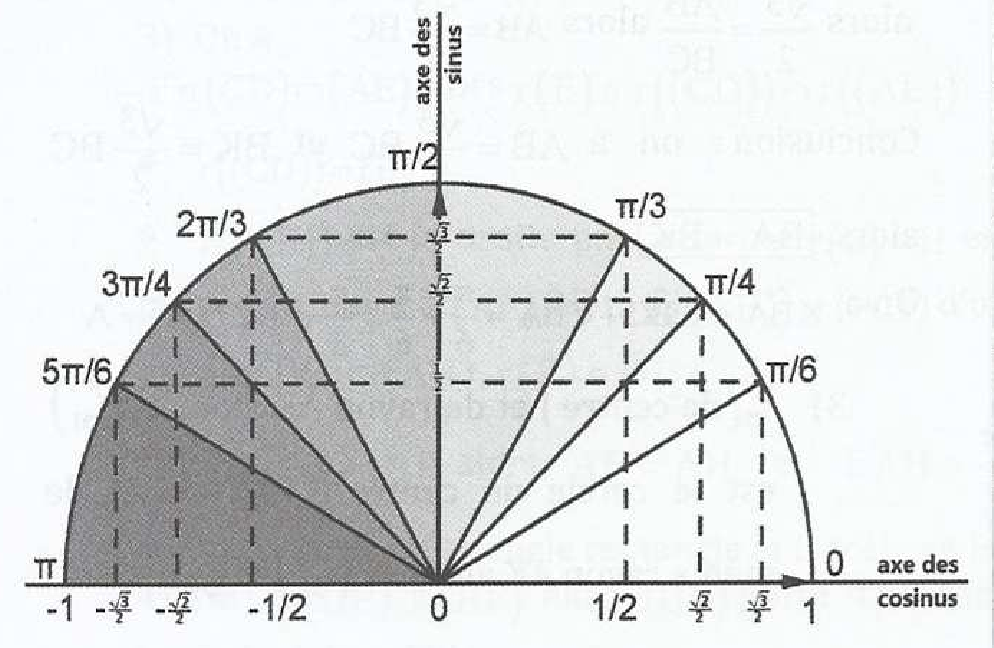
$\sin\alpha = \frac{AC}{BC}\left(= \frac{opp}{hyp}\right)$

$\cos\alpha = \frac{BA}{BC}\left(= \frac{adj}{hyp}\right)$

$\tan\alpha = \frac{AC}{AB}\left(= \frac{opp}{adj}\right)$

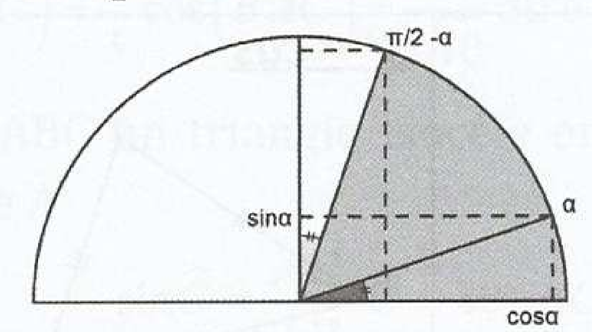
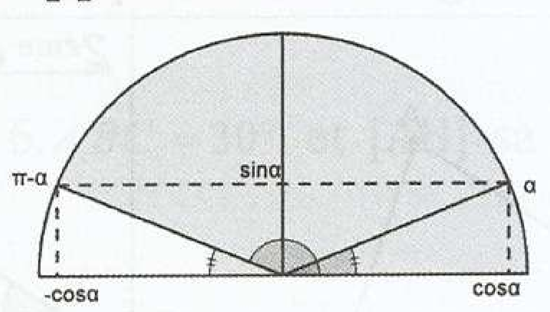
Relations fondamentales	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

B) Angles remarquables

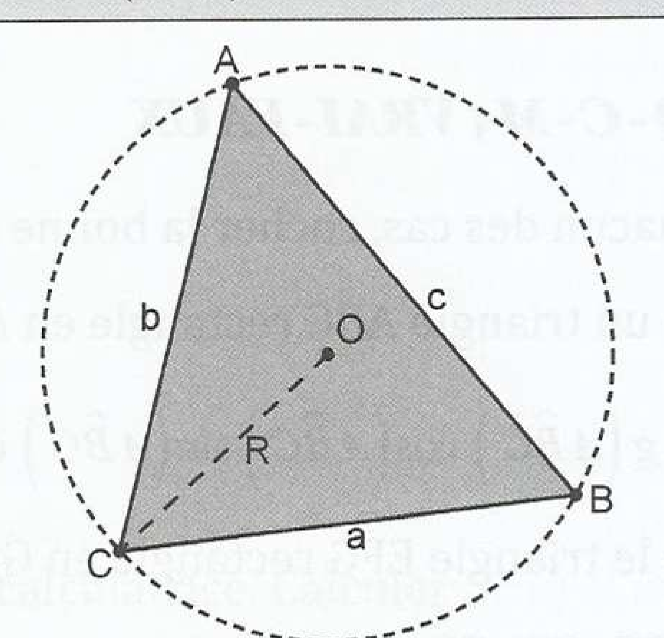


α (deg°)	0°	30°	45°	60°	90°		180°
α (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1		0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		-1
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$			0
cot α		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		



Angles complémentaires	**Angles supplémentaires**
	
$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$ $\quad$ $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$	$\cos(\pi-x)=-\cos x$
	$\sin(\pi-x)=\sin x$
$\tan(\frac{\pi}{2}-x)=\cot x$ $\quad$ $\cot(\frac{\pi}{2}-x)=\tan x$	$\tan(\pi-x)=-\tan x$
	$\cot(\pi-x)=-\cot x$

C) Loi du sinus – Aire d'un triangle



S est l'aire du triangle ABC

On a :

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

$$\underbrace{\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}}_{\text{Loi du sinus}}=2R=\frac{abc}{2S}$$

Théorème d'El-Kashi

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$

D) Relations métriques dans un triangle rectangle

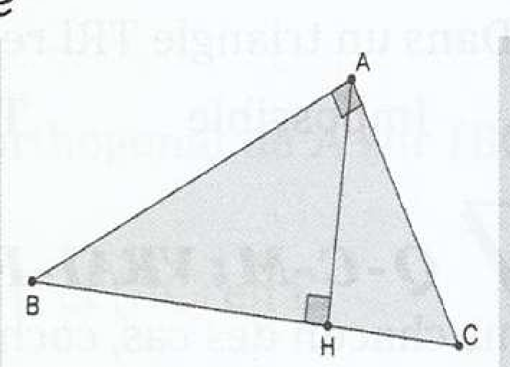
$BC^2 = AB^2 + AC^2$ *(Théorème de Pythagore)*

$AH \times BC = AB \times AC$

$AH^2 = HB \times HC$

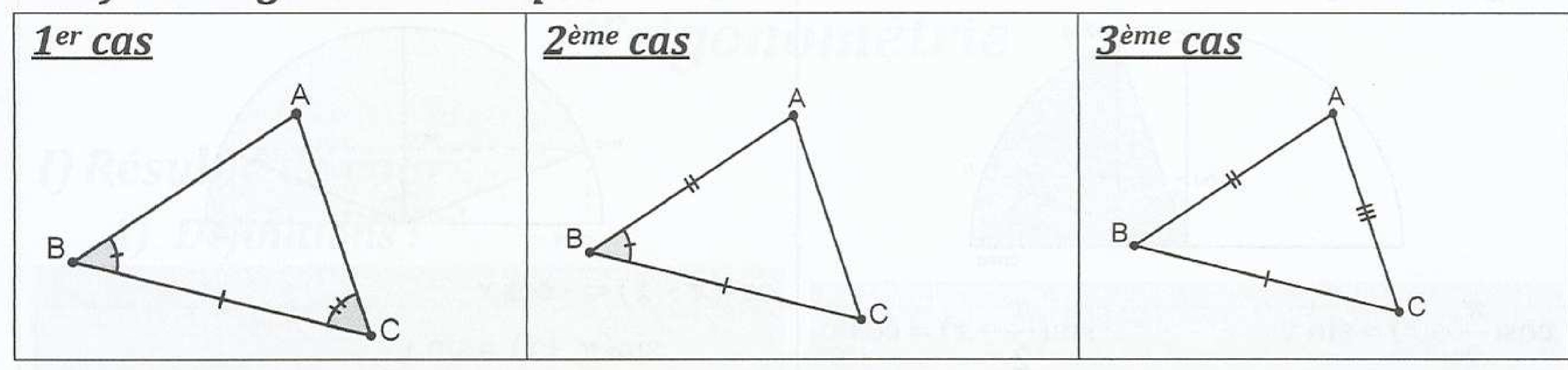
$AB^2 = BH \times BC$

$AC^2 = CH \times CB$

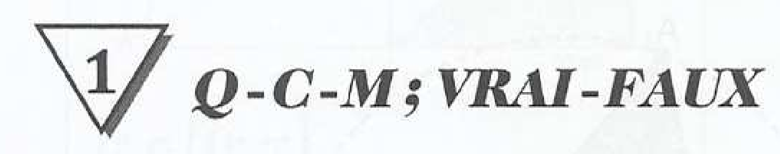




E) Triangles isométriques



II) Exercices



1/ Q-C-M ; VRAI-FAUX

Dans chacun des cas, cocher la bonne réponse

1) Dans un triangle ABC rectangle en A. le quotient $\dfrac{AB}{AC}$ est :

$tg\left(A\widehat{B}C\right)$ $\cos\left(A\widehat{B}C\right)$ $\sin\left(A\widehat{B}C\right)$ $\cot g\left(A\widehat{B}C\right)$

2) Dans le triangle EFG rectangle en G, $\cos\left(E\widehat{F}G\right)$ est :

$\dfrac{EG}{EF}$ $\dfrac{GE}{GF}$ $\dfrac{GF}{EF}$

3) Dans le triangle IJK rectangle en I, $\sin\left(I\widehat{J}K\right)$ est :

$\dfrac{IJ}{KJ}$ $\dfrac{IK}{KJ}$ $\dfrac{IK}{IJ}$

4) Dans un triangle ABC rectangle en A, on a $\cos\widehat{B} = \sin\widehat{B}$

$tg\,\widehat{B} = 2$ $tg\,\widehat{B} = 1$ $tg\,\widehat{B} = 0$

5) Dans un triangle TRI rectangle en I, on a $\cos\widehat{T} = \sin\widehat{R}$

Impossible TRI est isocèle $tg\widehat{T} = 1$ aucun de ces réponse

2/ Q-C-M ; VRAI-FAUX

Dans chacun des cas, cocher la bonne réponse

1) Soit EFG un triangle rectangle en E tel que EF = 6 et EG = 8. Soit H est le milieu de [FG] alors :

EH = 7 $\cos\widehat{F} = \dfrac{3}{4}$ $tg\widehat{G} = \dfrac{3}{4}$ aire de EFG = 24

2) Un rectangle ABCD a sa longueur qui est le triple de sa largeur. On note y la largeur, alors on a :

$\sin\left(B\widehat{A}C\right)=\frac{1}{3}$ $\cos\left(B\widehat{A}C\right)=\frac{3}{\sqrt{10}}$ aire de ABCD $=3y^2$

3) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AB = 6, $A\widehat{B}C=30°$ et [AH] sa hauteur issue de A

AH =3 $\quad\sin\widehat{C}=\frac{AC}{AH}$ $\widehat{C}=80°$ $BC=18\sqrt{3}$



3 APPLIQUER

Soit $x\in[0,\pi]$

1) On donne $\tan x=\frac{3}{2}$. Calculer cosx et sinx

2) On donne $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.calculer cosx et tanx

3) On donne $\tan x=-\frac{3}{2}$. Calculer cosx et sinx



4 APPLIQUER

Sans utiliser ni la table trigonométrique ni une calculatrice. Calculer

$A=\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{14}-\sin\frac{3\pi}{7}$

$B=\tan\frac{\pi}{9}+\tan\frac{2\pi}{9}+\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{4\pi}{9}+\tan\frac{5\pi}{9}+\tan\frac{2\pi}{3}+\tan\frac{7\pi}{9}+\tan\frac{8\pi}{9}$

$C=\cos^2\frac{\pi}{5}+\cos^2\frac{2\pi}{5}+\sin^2\frac{3\pi}{5}+\sin^2\frac{4\pi}{5}$

$D=\tan\frac{\pi}{12}.\tan\frac{5\pi}{12}+co\tan\frac{\pi}{5}.\tan\frac{4\pi}{5}$



5 S'ENTRAINER

Sur la figure ce dessous ABC est un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC), $\widehat{BAH}=45°$; $\widehat{HAC}=30°$ ET AH=6cm

Le cercle (C) de diamètre $[AH]$ et de centre O coupe (AB) en D et (AC) en E.

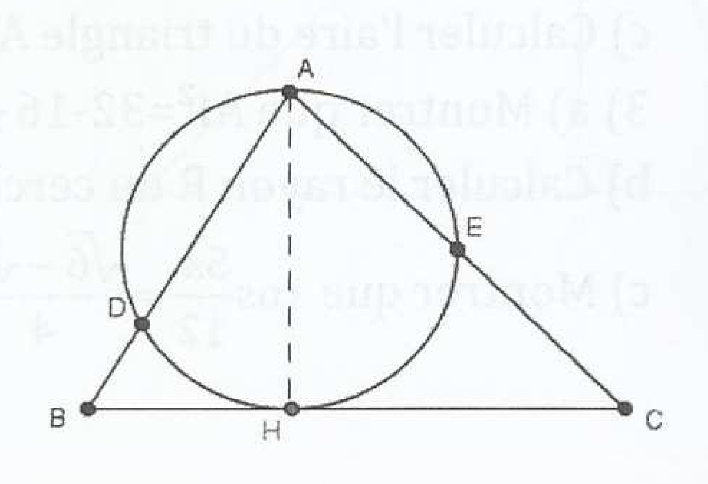
1)a) Calculer AB et AC.

b)Montrer que AHE est triangle rectangle

Montrer que AE=$3\sqrt{3}$ cm

2)a) Démontrer que $\widehat{AHE}=\widehat{ADE}$ =60°

En déduire que les triangles BAC et EAD sont semblables.



b) Après avoir rempli le tableau de proportionnalité des longueurs, déduisez-en que le rapport qui fait passer du triangle BAC au triangle EAD est $\frac{\sqrt{6}}{4}$. S'agit-il d'une réduction ou d'un agrandissement ? Expliquer :

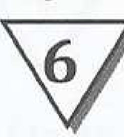
3)a) Calculer BC (on pourra couper par H)

b) Déduisez-en que $DE = \frac{3}{2} \times \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$ cm

4) On note F le point diamétralement opposé à D sur C.

a) Démontrer que $\widehat{DFE} = 75°$

b) Déduisez-en que $\sin 75° = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$



6 S'ENTRAINER

ABC est un triangle tel que AB = 3, AC = 5 et BC = 7.

1) Montrer que $\hat{A} = \frac{2\pi}{3}$; puis construire le triangle ABC.

2) a) Calculer la mesure de l'aire du triangle ABC.
   b) Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Soit H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).
   a- Calculer BH, AH et CH.
   b- Calculer $\sin \widehat{ACB}$ et $\sin \widehat{ABC}$.



7 SEPERFECTIONNER

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A et de sens direct tel que : AB=4cm

1)a) Construire le point D image du point A par la rotation indirecte de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

b) Construire le point I image du point D par la rotation directe de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$

2) a) Montrer que le quadrilatère ABDC est carré

b) calculer $A\hat{B}I$ puis $B\hat{A}I$

c) Calculer l'aire du triangle ABI

3) a) Montrer que $AI^2 = 32 - 16\sqrt{3}$

b) Calculer le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABI

c) Montrer que $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

4) Soient J le symétrique du point B par rapport à A, O le centre du carré ABCD et Ω le point tel que :.............

a) Montrer que le triangle $I\Omega J$ est isocèle rectangle

b) Prouver que les deux triangles $I\Omega J$ et OAB sont semblables.

8 SEPERFECTIONNER

I) Calculer $\cos\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{7\pi}{12}$

II) ABC est un triangle inscrit dans un cercle ξ de centre O et de rayon $R=2\sqrt{2}$

On donne AC = 4, $\widehat{ACB}=\frac{\pi}{6}$ et $\widehat{ABC}$ un angle aigu

1) Calculer AB

2) Montrer que $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{4}$

3) Soit H le point de $[BC]$ tel que AC = CH

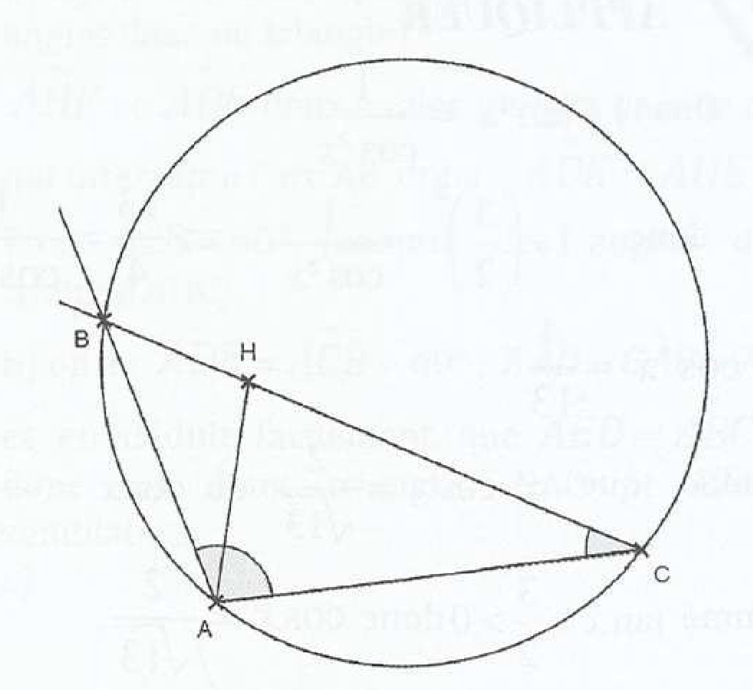
4) Calculer l'aire du triangle AHC

5) a) Calculer $\widehat{AHB}$

b) Montrer que $AH=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

c) En déduire que $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

d) Calculer alors $\cos\frac{7\pi}{12}$





9 SEPERFECTIONNER

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{4}$, $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{3}$ et AC = $4\sqrt{3}$

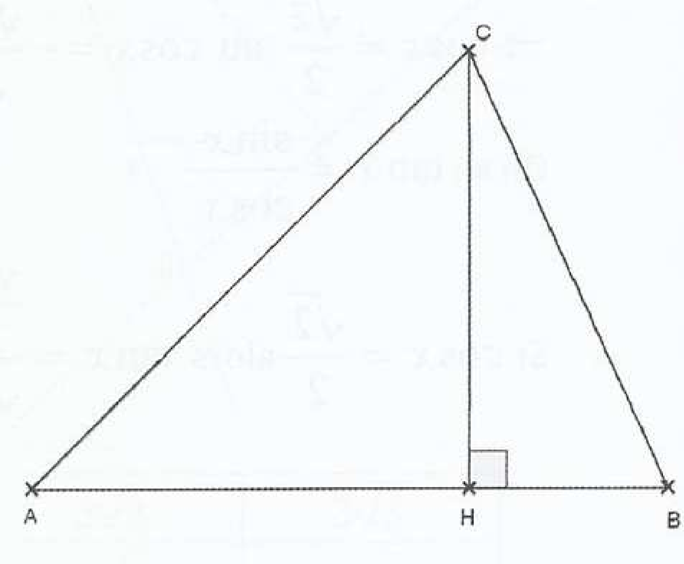
1) Montrer que BC = $4\sqrt{2}$

2) Calculer AH, BH et AB

3) a) En déduire que $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) Déterminer $\cos\frac{\pi}{12}, \cos\frac{7\pi}{12}$ et $\cos\frac{11\pi}{12}$

c) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'inéquation $\sin x\geq\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.





1 VRAI-FAUX ; Q-C-M

1) $\cot g\left(A\widehat{B}C\right)$ 2) $\dfrac{GF}{EF}$ 3) $\dfrac{IK}{KJ}$

4) $tg\widehat{B}=1$ 5) aucun de ces réponses



2 VRAI-FAUX ; Q-C-M

1) $tg\widehat{G}=\dfrac{3}{4}$ et aire de EFG =24

2) 2) $\cos\left(B\widehat{A}C\right)=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ et aire de ABCD $=3y^2$

3) AH =3



3 APPLIQUER

1) On a : $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

2) donc $1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \dfrac{13}{4}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow \cos^2 x=\dfrac{4}{13}$

Signifie que $\Rightarrow \cos x=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ ou $\cos x=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

comme $\tan x=\dfrac{3}{2}>0$ donc $\cos x=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

On sait que $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ donc

$\sin^2 x=1-\dfrac{4}{13}=\dfrac{9}{13}$ par suite $\sin x=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

3) $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On a : $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

Si $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ alors $\tan x=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Si $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ alors $\tan x=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

4) On a : $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ donc

$1+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \dfrac{13}{4}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow \cos^2 x=\dfrac{4}{13}$

Signifie que $\Rightarrow \cos x=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ ou $\cos x=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

comme $\tan x=-\dfrac{3}{2}<0$ donc $\cos x=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

On sait que $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ donc

$\sin^2 x=1-\dfrac{4}{13}=\dfrac{9}{13}$ par suite $\sin x=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$



4 APPLIQUER

$A=\cos\dfrac{\pi}{14}+\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{14}-\sin\dfrac{2\pi}{7}-\sin\dfrac{5\pi}{14}-\sin\dfrac{3\pi}{7}$

On remarque que : $\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{5\pi}{14}=\dfrac{\pi}{2}$

donc $\cos\dfrac{\pi}{7}=\sin\dfrac{5\pi}{14}$

$\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos\dfrac{\pi}{14}=\sin\dfrac{3\pi}{7}$

$\dfrac{3\pi}{14}+\dfrac{2\pi}{7}=\dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos\dfrac{3\pi}{14}=\sin\dfrac{2\pi}{7}$

Ainsi

$A=\cos\dfrac{\pi}{14}+\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{14}-\cos\dfrac{3\pi}{14}-\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos\dfrac{\pi}{14}=0$

$B=\tan\dfrac{\pi}{9}+\tan\dfrac{2\pi}{9}+\tan\dfrac{\pi}{3}+\tan\dfrac{4\pi}{9}$

$+\tan\dfrac{5\pi}{9}+\tan\dfrac{2\pi}{3}+\tan\dfrac{7\pi}{9}+\tan\dfrac{8\pi}{9}$

$=(\tan\dfrac{\pi}{9}+\tan\dfrac{8\pi}{9})+(\tan\dfrac{2\pi}{9}+\tan\dfrac{7\pi}{9})$

$+(\tan\dfrac{\pi}{3}+\tan\dfrac{2\pi}{3})+(\tan\dfrac{4\pi}{9}+\tan\dfrac{5\pi}{9})$

On sait que si $\alpha+\beta=\pi$ alors $\tan\alpha=-\tan\beta$

Ainsi

$= (\tan\frac{\pi}{9} - \tan\frac{\pi}{9}) + (\tan\frac{2\pi}{9} - \tan\frac{2\pi}{9})$

$+ (\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{3}) + (\tan\frac{4\pi}{9} - \tan\frac{4\pi}{9}) = 0$

$C = \cos^2\frac{\pi}{5} + \cos^2\frac{2\pi}{5} + \sin^2\frac{3\pi}{5} + \sin^2\frac{4\pi}{5}$

On remarque que $\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi$

donc $\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\frac{4\pi}{5}$

$\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi$ donc $\cos\frac{2\pi}{5} = -\cos\frac{3\pi}{5}$

Ainsi

$C = (\cos^2\frac{4\pi}{5} + \sin^2\frac{4\pi}{5})$

$+ (\cos^2\frac{3\pi}{5} + \sin^2\frac{3\pi}{5}) = 1 + 1 = 2$

$D = \tan\frac{\pi}{12} . \tan\frac{5\pi}{12} + cot n\frac{\pi}{5} . \tan\frac{4\pi}{5}$

$= \tan\frac{\pi}{12} . \tan\frac{5\pi}{12} + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{5}} . \tan\frac{4\pi}{5}$

On sait que si $\alpha + \beta = \pi$ alors $\tan\alpha = -\tan\beta$

donc $\tan\frac{4\pi}{5} = -\tan\frac{\pi}{5}$ et si $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ alors

$\tan\alpha = \cot n\beta$ donc $\tan\frac{\pi}{12} = cot n\frac{5\pi}{12}$

Ainsi $D = \cot\frac{5\pi}{12} \times \tan\frac{5\pi}{12} - 1$

$= \frac{1}{\tan\frac{5\pi}{12}} . \tan\frac{5\pi}{12} - 1 = 1 - 1 = 0$



5 S'ENTRAINER

1) a) le triangle AHB est rectangle en H,

$\cos B\hat{A}H = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \cos B\hat{A}H$

$\Rightarrow AB = \frac{AH}{\cos B\hat{A}H}$

$= \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6\sqrt{2}$.

De même dans le triangle AHC on a $AC = \frac{AH}{\cos H\hat{A}C} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$

b) E∈ C de diamètre [AH] donc le triangle AHE est un triangle rectangle en E.

c) $\cos A\hat{H}E = \frac{AE}{AH}$

$\Rightarrow AE = AH \times \cos A\hat{H}E = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

2) a) Il est clair que $A\hat{H}E$ = 60° (somme des angles dans un triangle).

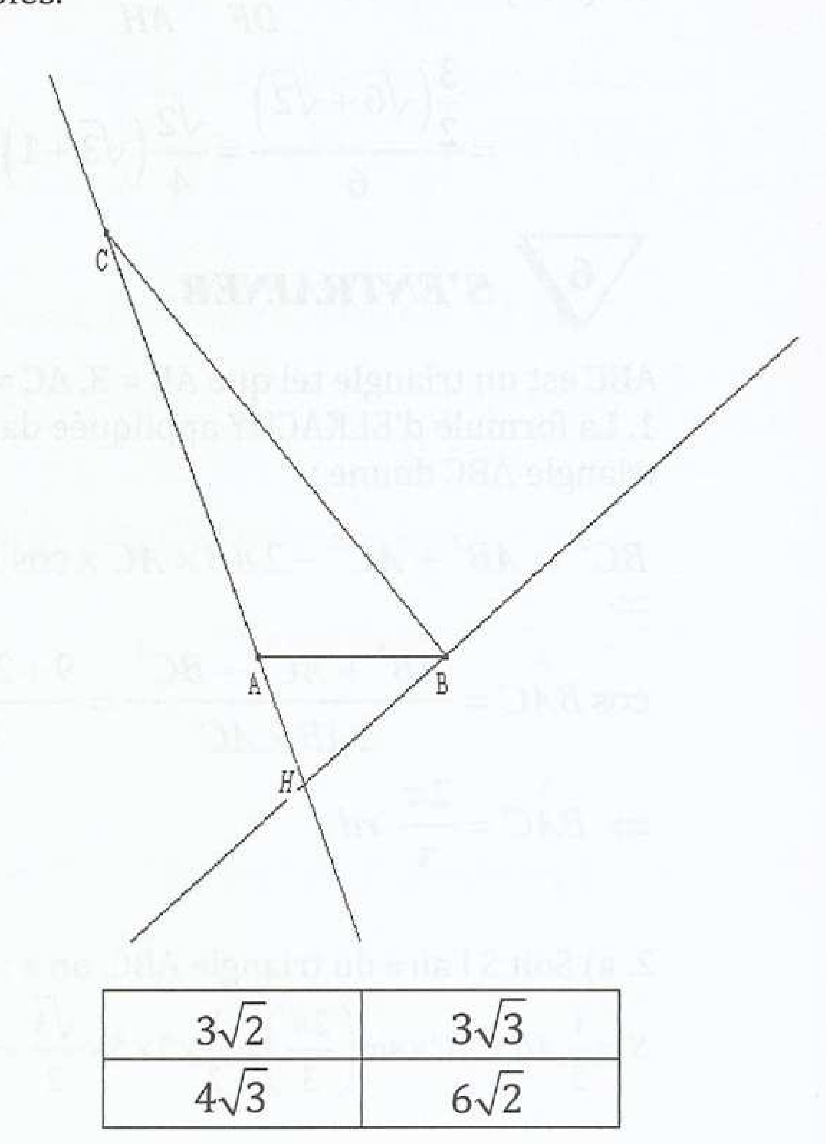
$A\hat{H}E$ et $A\hat{D}E$ deux angles inscrits dans le cercle C qui intercepte l'arc AE donc $A\hat{D}E = A\hat{H}E = 60°$

Pour $A\hat{C}B = 60°$ (somme des angles dans le triangle AHC)

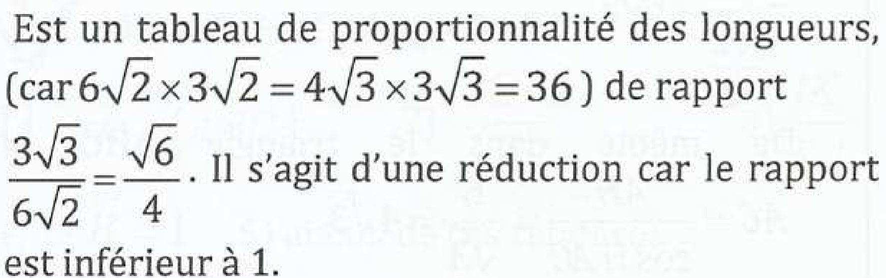
b) on a : $A\hat{D}E = A\hat{C}B = 60°$, $E\hat{A}D = C\hat{A}B = 75°$

et en déduit facilement que $A\hat{E}D = A\hat{B}C = 45°$ donc les deux triangles BAC et EAD sont semblables.

c)



$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}$
$4\sqrt{3}$	$6\sqrt{2}$


Est un tableau de proportionnalité des longueurs, (car $6\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=4\sqrt{3}\times3\sqrt{3}=36$) de rapport $\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$. Il s'agit d'une réduction car le rapport est inférieur à 1.

3) a) $\sin H\hat{A}B=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{BH}{6\sqrt{2}}\Rightarrow BH=6$

$\sin H\hat{A}C=\frac{HC}{AC}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{HC}{4\sqrt{3}}\Rightarrow HC=2\sqrt{3}$

b) $DE=BC\times\frac{\sqrt{6}}{4}\Rightarrow DE=\frac{\sqrt{6}}{4}\left(6+2\sqrt{3}\right)$

$=\frac{3}{2}\sqrt{6}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

4) a) $A\hat{D}E$ est un angle inscrit dans le cercle qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{DE}$

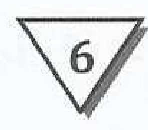
$D\hat{F}E$ est un angle inscrit dans le cercle qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{DE}$

Donc $D\hat{F}E=D\hat{A}E=75°$

b) le triangle DFE est rectangle en E,

$\sin(75°)=\sin D\hat{F}E=\frac{DE}{DF}=\frac{DE}{AH}$

$=\frac{\frac{3}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{6}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$



6 S'ENTRAINER

ABC est un triangle tel que AB = 3, AC = 5 et BC = 7.

1. La formule d'ELKACHY appliquée dans le triangle ABC donne :

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos B\hat{A}C$

$\Rightarrow$

$\cos B\hat{A}C=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}=\frac{9+25-49}{30}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow B\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}\ rd.$

2. a) Soit S l'aire du triangle ABC, on a :

$S=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\times3\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

b) La loi des sinus appliquées dans le triangle ABC donne :

$\frac{BC}{\sin\hat{A}}=\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}=\frac{AB\times AC\times BC}{2S}=2R$

$\Rightarrow R=\frac{BC}{2\sin\hat{A}}=\frac{7}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}.$

3. Soit H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).

a) * Dans le triangle ABH rectangle en H, on a :

$\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{BH}{AB}\Rightarrow BH=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}.$

* Dans le même triangle, on peut aussi écrire :

$\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{AH}{AB}\Rightarrow AH=\frac{3}{2}.$

* CH = CA + AH = $5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$.

b) * $\sin A\hat{C}B=\sin H\hat{C}B=\frac{BH}{BC}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{7}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$,

ou bien $\sin A\hat{C}B \underset{\text{loi des sinus}}{=} \frac{AB}{2R}=\frac{3}{\frac{14\sqrt{3}}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

* $\sin A\hat{B}C=\frac{AC}{2R}=\frac{5}{\frac{14\sqrt{3}}{2}}=\frac{5\sqrt{3}}{21}.$

7 SE PERFECTIONNER

1) a) Voir figure

b) Voir figure

2) a) On a : $r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)}(A)=D\Rightarrow(AB)\perp(BD)$

et $AB=BD$

On a aussi $(AB)\perp(AC)$ et $AB=AC$ donc $(AC)//(BD)$ et $BD=AC$ donc ABDC est un losange qui à un angle rectangle donc ABDC est un carré.

b) $A\hat{B}I=A\hat{B}D-D\hat{B}I=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}(30°)$

On a : $r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}(D)=I \Rightarrow BD=BI$ or BD = BA

donc BI = BA, alors le triangle ABI est isocèle en B.

$I\hat{B}A+B\hat{A}I+A\hat{I}B=\pi$

$\Rightarrow 2B\hat{A}I=\pi-I\hat{B}A=\dfrac{\pi-\dfrac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{5\pi}{12}(75°)$

3) a) D'après le théorème d'El-Kashi on a :

$AI^2=AB^2+BC^2-2AB.BC.\cos(\dfrac{\pi}{6})$

$=16+16-2\times16\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

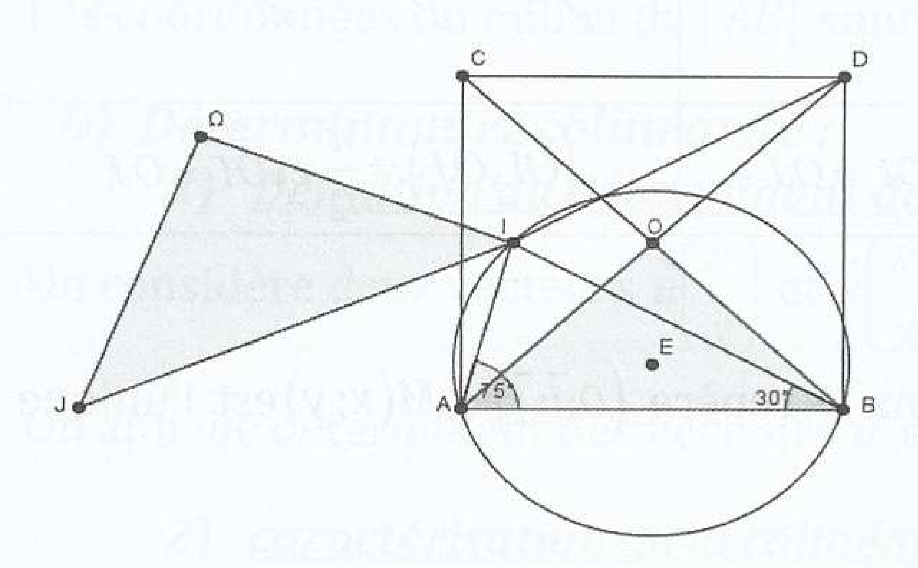
$=32-16\sqrt{3}$

b) $2R=\dfrac{BI}{\sin\hat{A}}$

$\Rightarrow R=\dfrac{4}{2\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)}$

$=\dfrac{2}{\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)}=\dfrac{2}{0.97}=2.06$

c)



Géométrie Analytique

I) Résumé de cours

A) Calcul vectoriel dans un repère :

Soit O,I et J trois points non alignés du plan. On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. Dans toute la suite, on considère le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) Différents types de repères :

Orthonormé (maille: carré)	**Orthogonal (maille : rectangle)**	**Quelconque (maille : parallélogramme)**
J, O, I	J, O, I	J, O, I
$\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $OI = OJ$	$\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $OI \neq OJ$	$\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right) \neq \frac{\pi}{2}$ et $OI \neq OJ$

a) *Coordonnées d'un point du plan :*

Le couple de coordonnées d'un point M dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$; $M(x;y)$ est l'unique couple (x ; y) de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

b) *Coordonnées d'un vecteur du plan.*

Le couple de coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$; $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est l'unique couple (x ;y) de réels tels que $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

2) Opérations vectorielles :

a) *Egalité de deux vecteurs :*

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées dans le même repère.

B) Opérations algébriques :

On considère un réel k et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$

Le vecteur $k.\vec{u}$ pour coordonnées : $\begin{pmatrix} k\times x \\ k\times y \end{pmatrix}$

1) Coordonnées d'un vecteur en fonction de ses représentants :

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

C) Applications :

1) Calcul de la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé :

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

$\|\overrightarrow{AB}\| = d(A;B) = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

2) Calcul des coordonnées du milieu d'un segment :

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

D) Déterminant et colinéarité :

1) Définition du déterminant de deux vecteurs :

On considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel $Dét(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

2) caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

a) Equation de droite :

Analytiquement, la droite Δ est définie ainsi : $\Delta : \{M(x,y) \ / \ ax+by+c=0\}$

L'expression « ax+by +c =0 » est appelée équation cartésienne de la droite Δ.

Selon que b est nul ou non, on peut écrire cette expression sous la forme x=d ou $y = mx + p$. On parle dans ce cas de l'équation réduite de Δ.

Remarque :

Seules les équations réduites du type $y = mx + p$ sont fonctionnelles. Dans ce type d'équations, la fonction liée est la fonction affine $x \mapsto mx + p$ (m : coefficient directeur et p : ordonnée à l'origine).

b) Vecteur directeur d'une droite :

On dit qu'un vecteur est directeur d'une droite donnée, lorsqu'il a la même direction que cette droite.

Remarque :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Une droite admet une infinité de vecteur directeurs, qui sont tous colinéaires.

c) Coordonnées d'un vecteur directeur :

Si une droite a pour équation $y = mx + p$, alors un vecteur directeur de cette droite a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$

E) Caractérisation du parallélisme et de l'orthogonalité de deux droites du plan :

1) Caractérisation du parallélisme

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux.

2) Caractérisation de l'orthogonalité :

Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Deux droites non verticales sont orthogonale si et seulement si le produit de leurs coefficients directeursvaut -1

II) Exercices



Q-C-M

1) Soit A(-1, 3) et B(2, -5) alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

2) Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ sont : colinéaires ; égaux ; quelconque

3) A(-1,3) et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$. Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ est tel que : M(6,1) ; M(4,7) ; M (-4,-7)

4) ABC un triangle, G le centre de gravité et J le milieu de [AC]. Alors :

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$; $\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB}$

5) Soit A(2,-1) et B(3,2), l'équation cartésienne de la droite (AB) est :

$3x - y - 7 = 0$; $6x - 2y + 7 = 0$; $3x + y + 7 = 0$

6) Un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $D : x + 3y + 2 = 0$ est : $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$



7) Soit $D: ax+by+c=0$ et $D': a'x+b'y+c'=0$ alors D//D' si et seulement si :
a'b + ab'= 0 ab' – a'b = 0 ac' – ca' = 0

8) Un vecteur normal à la droite $D: 5x+4y=0$ est : $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$; $\vec{n}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$; $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$

9) Les deux droites $D: 6x-5y+3\sqrt{2}=0$ et $D': x+6y-2=0$ sont deux droites : perpendiculaires ? Parallèles ?

10) Soit $D: y=mx+p=0$ et $D': y=m'x+p'=0$ alors :
$D//D'$ si et seulement si : m = m' ; m.m' = -1
$D \perp D'$ si et seulement si : m = m' ; m.m' = -1



2 APPLIQUER

On considère le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ ainsi que les points A,B et C de coordonnées : $A(2;1)$; B(-1 ;-1) C(1;2)

1) Placez les points A,B et C.
2) Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans $(O;\vec{i};\vec{j})$.
3) On considère à présent le repère $(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$. Quel est le type de ce repère ?
4) Déterminez à nouveau les coordonnées des points A,B et C et des vecteurs $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$



3 APPLIQUER

Dans le plan muni d'un repère quelconque, on donne les points suivants :
A (-1 ;1) ;B(1 ;-2) ; C(5 ;1) D(3 ;4)

1) Placez ces points.
2) Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DC}$.Déduisez-en la nature de ABCD.



4 APPLIQUER

A (-2 ;1), B(0,-2) et C(3 ;-1) sont des points dans un repère quelconque.

1) Déterminez les coordonnées du point F pour que ABCF soit un parallélogramme.
2) Calculez les coordonnées de la somme vectorielle $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.
3) Déduisez-en une deuxième manière pour déterminer les coordonnées du point F.



5 APPLIQUER

On reprend les données de l'exercice 2 dans un repère orthonormé.

1) Déterminez les coordonnées des milieux de $[AC]$ et $[BD]$. Qu'en concluez-vous concernant ABCD ?

2) Calculez la longueur des segments $[AC]$ et $[BD]$. Qu'en concluez-vous concernant ABCD.



6 APPLIQUER

Dans un repère, on donne les points suivants : $A\left(-\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$ $B\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ $C\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$ $D\left(\frac{13}{4};3\right)$

1) Démontrez que les points A,B et C sont alignés.

2) les points B, C et D sont-ils alignés ?

3) On considère un point M(x,y). Déterminez une condition sur x et y telle que M$\in$ (AB)



7 APPLIQUER

On considère les droites D et D' d'équation respectives : x-2=0 et x+3y=4

1) Construisez les deux droites sans passer par leur équations réduites.

2) Déterminez algébriquement si le point E (7 ;-1) appartient à D ou à D'.



8 APPLIQUER

On considère les points suivants A (1 ; 3) ; B (1 ;4) ; C(1 ;2) et D(3 ;1)

1) Donnez une équation de la droite (AB) et de la droite (CD).

2) Déterminez un vecteur directeur de (AB) et un vecteur directeur de (CD)



9 APPLIQUER

On considère les droites suivantes, définies par leurs équations.

$\Delta_1 : 2x+3y-12=0$ $\Delta_2 : 2x-10=0$ $\Delta_3 : y=17$ $\Delta_4 : 3x-2y+4=0$ $\Delta_5 : 54x+81y-405=0$

$\Delta_6 : x=2$

1) Précisez les droites parallèles et orthogonales en vous basant uniquement sur leurs équations.

2) Déterminez l'équation de la parallèle à Δ_4 passant par l'origine du repère.

3) Déterminez l'équation de la perpendiculaire à Δ_1 passant par le point (3 ;0)



S'ENTRAINER

Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ on considère les points A(1,4) , B(2,1) et C(6 ,5)

1) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure
2) Déterminer une équation de la droite (AI) ou I le milieu de [BC]
3) Déterminer une équation de la droite passant par B et parallèle à la droite (AC)
4) Résoudre le système suivant $\begin{cases} x+3y-13=0 \\ -x+5y-3=0 \end{cases}$

Interpréter graphiquement

5) Montrer que les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC sont $\left(3,\dfrac{10}{3}\right)$
6) Soit D le point tel que BGCD soit un parallélogramme.

Calculer les coordonnées de D.

7) Montrer que D∈(AI)



S'ENTRAINER

Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ on considère la droite (d) d'équation

x −2y +3 =0 ainsi que les points $A\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$, B (-3, 1), $C\left(6,\dfrac{9}{2}\right)$ et E (-1,-1)

1) Soit F le point tel que $\overrightarrow{OF}=3\vec{i}+\dfrac{3}{2}\vec{j}$. Démontrer que le triangle ACF est rectangle en F
2) On considère le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (2,0). Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{FG}=\vec{u}$
3) On appelle H le milieu de [AC]. Calculer ses coordonnées. Montrer que (d) et (GH) sont perpendiculaires.
4) Soit K le point tel que $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{GH}$. Quelle est la nature de AKCG
5) Démontrer que les points A,C,F,G et K appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.



SEPERFECTIONNER

$R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan

1) Soit D la droite passant par A(4,6) et de coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$. Donner une équation cartésienne de D.
2) a) Déterminer une équation cartésienne du cercle **C** de centre I(-1,1) et tangent à la droite D.

   b) Trouver les coordonnées du point de contact H de **C** et D.
3) Trouver les tangentes à **C** issue du point B(2,0)



SEPERFECTIONNER

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé du plan

On désigne par (C) l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2-2y-1=0$

Et par (Δ) la droit d'équation $x+y-1=0$

1)a) montre que (C) est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon R

b) vérifier que $I \in (\Delta)$

2)a) vérifier que le point $M(-1;2) \in (C)$

b) écrire une équation de la tangente (Δ') au cercle (C) en M

c) prouver que les droites (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires

d) déterminer une équation de l'autre tangente à (C) et perpendiculaire à (Δ)

3)a) soit EFG un triangle équilatéral de coté a.

Exprimer en fonction de a la distance du point G à la droite (EF).

b) déterminer les équations des droites parallèles à (Δ) qui coupent le cercle (C) en deux points A et B tels que IAB soit un triangle équilatéral.



SEPERFECTIONNER

On considère les droites D : 2x + 2 y – 1 = 0 et T : 5x - y + 3 = 0.

1) Montrer que D et T sont sécantes en un point I. Déterminer les coordonnées de I.

2) Tracer D et T dans le repère R.

3) Soit un réel m et l'ensemble $D_m = \{ M(x, y)$ tel que $m x + (2m-3) y + 2 = 0\}$

4) a) Montrer que pour tout réel m, D_m est une droite.

b) Déterminer m pour que les droites Dm, T et D soient concourantes.



SEPERFECTIONNER

On considère l'ensemble C : $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$

1) Montrer que C est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2) Vérifier que A(1 , -1) appartient à C .

3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle C en A.

4) Soit la droite D : x + 2y – 1 = 0. Etudier la position relative de C et D.

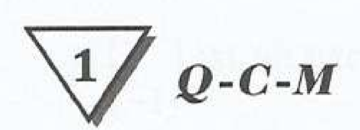
5) Soit la droite Dm d'équation Dm : y = x + m . Pour quelles valeurs Dm et tangente à àC ?



SEPERFECTIONNER

Soit ABC un triangle rectangle en A et tel que AB =4 et AC =3

Déterminer l'ensemble E des points M tels que $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 66$



1 Q-C-M

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}$ 2) colinéaires 3) M(4,7)

4) $\overrightarrow{GJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ 5) $3x-y-7=0$

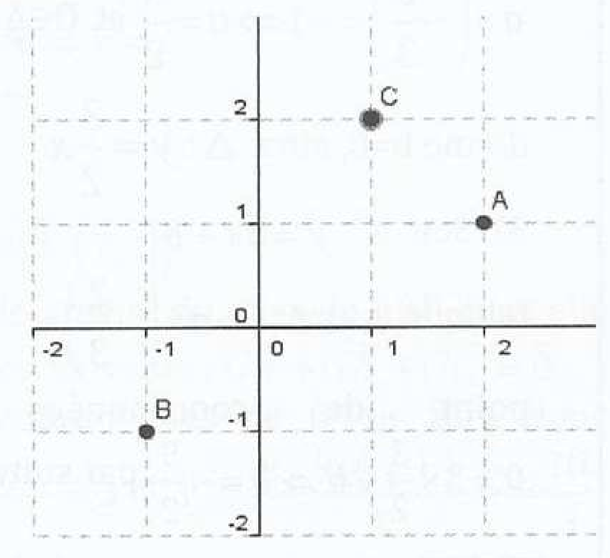
6) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ 7) $ab'-a'b=0$ 8) $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$

9) perpendiculaires

10) m = m', m.m'= -1

2 APPLIQUER

1) voir figure



2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-2\\-1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1-(-1)\\2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-2\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

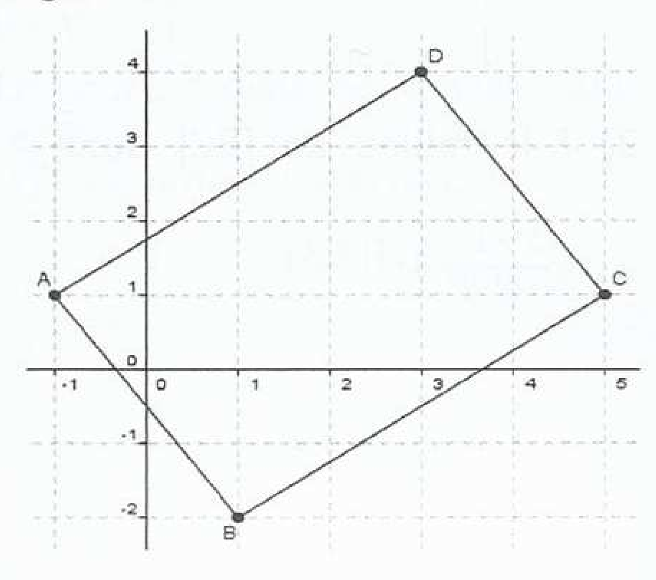
3) Le repère $\left(B,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ n'est pas un repère orthogonal

4) A(0,1) ; B(0,0) ; C(1,0)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

3 APPLIQUER

1) Voir figure



2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ on remarque que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ donc ABCD est parallélogramme.

4 APPLIQUER

1) ABCF est un parallélogramme signifie que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CF}$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-x\\-1-y\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x=1, y=2$ donc F(1,2)

2) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

3) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BF}$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ donc F(1,2)

5 APPLIQUER

1) Soit I le milieu de [AC] donc $x_I=\frac{-1+5}{2}=2$ et

$y_I=\frac{1+1}{2}=1$ alors I(2,1)

Soit J le milieu de [BD] donc $x_J=\frac{1+3}{2}=2$ et

$y_J=\frac{4-2}{2}=1$ alors J(2,1)

On remarque que [AC] et [BD] se coupent en même milieu I et par suite ABCD est un parallélogramme.

2) $AC=\sqrt{0^2+6^2}=6$, $BD=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}$

6 APPLIQUER

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}4&6\\2&3\end{vmatrix}=12-12=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc A,B et C sont alignés

2) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}\frac{11}{4}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}2&\frac{11}{4}\\1&\frac{3}{2}\end{vmatrix}=3-\frac{11}{4}\neq0$

donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires et par suite B,C et D ne sont pas alignés

3) Soit $M \in (AB)$ donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires signifie que $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$ signifie que

$$\begin{vmatrix} x+\frac{7}{2} & 4 \\ y+\frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x+7-4y-2=0$$

$\Leftrightarrow 2x-4y+5=0$

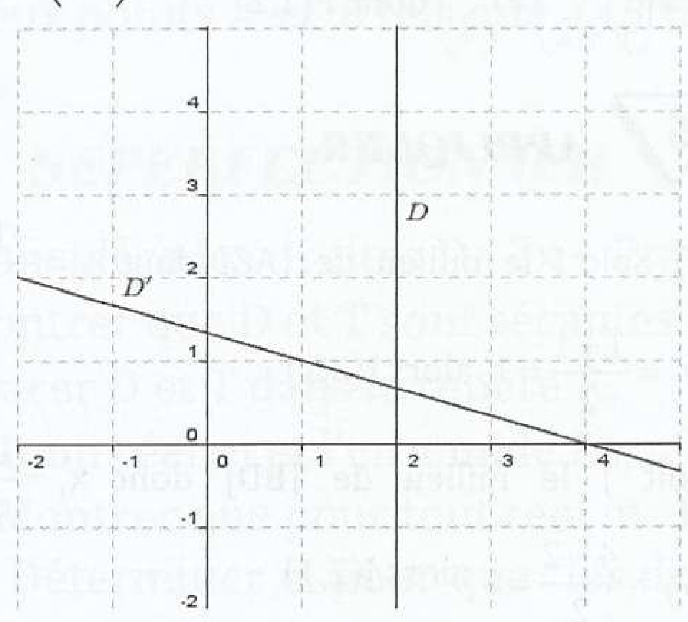


7 APPLIQUER

1) Les points A(2,0) et B(2,1) appartient à la droite D et H(1,1) et K (-2,2) appartient à la droite D'

(Car $-2+3\times2=4$ et $1+3\times1=4$)

2) Pour $x=7$, 7 -2= 5≠0 et $7+3\times(-1)=7-3=4$ donc E∈D'.



8 APPLIQUER

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB)

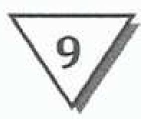
Soit $M\in(AB)$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires signifie que $\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-1=0$ donc (AB) : x=1

Soit $M\in(DC)$,

donc $\begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ 1-y & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 3-x-2y+2=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0$

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (AB) et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (DC)



9 APPLIQUER

1) Ecrivons les équations réduites des droites

$\Delta_1 : y=-\frac{2}{3}x+6$; $\Delta_2 : x=5$; $\Delta_3 : y=17$;

$\Delta_4 : y=\frac{3}{2}x+2$; $\Delta_5 : y=-\frac{2}{3}x+5$; $\Delta_6 : x=2$

Donc $\Delta_1 // \Delta_5$ et $\Delta_2 // \Delta_6$

$\Delta_3 \perp \Delta_2$, $\Delta_3 \perp \Delta_6$, $\Delta_1 \perp \Delta_4$ et $\Delta_5 \perp \Delta_4$

2) Soit Δ : y=ax+b tel que $\Delta_4 // \Delta$ alors $a\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-1 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$ et $O\in\Delta$ donc 0=0+b ce qui donne b=0, ainsi $\Delta : y=\frac{3}{2}x$

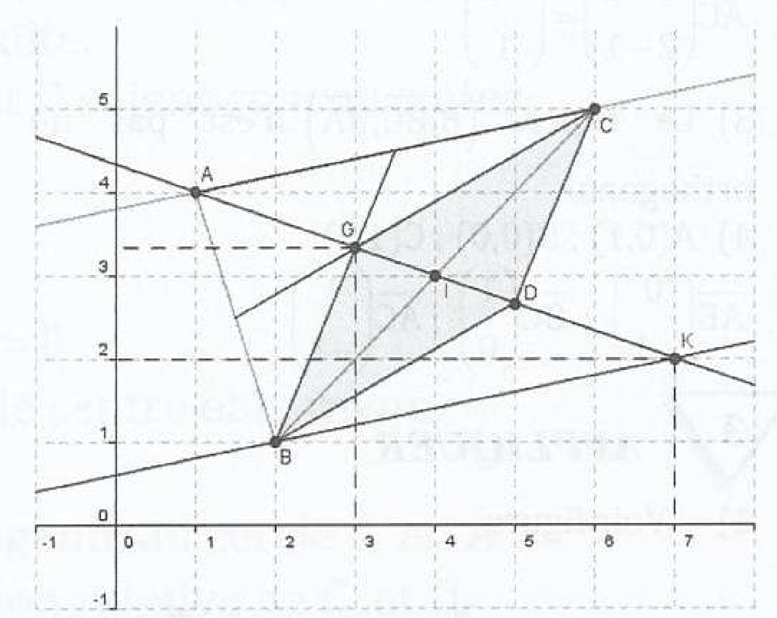
3) Soit $\Delta' : y=ax+b$

tel que $\Delta' \perp \Delta_1 \Rightarrow a\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-1 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$ comme le point de coordonnées $(3,0)\in\Delta'$ donc $0=3\times\frac{3}{2}+b \Rightarrow b=-\frac{9}{2}$ par suite $\Delta' : y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$



10 S'ENTRAINER

1) Voir figure



2) I le milieu de [BC] donc $x_I=\frac{2+6}{2}=4$ et $y_I=\frac{5+1}{2}=3$, I(4,3)

$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AI) donc (AI) : $-x-3y+c=0$ comme A∈(AI) donc $-1-3\times4+c=0\Rightarrow-13+c=0\Rightarrow c=13$ par suite (AI) : $x+3y-13=0$

2) Soit (d) la droite passant par B tel que (d)//(AI) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) donc $(AC): x-5y+c=0$ comme B∈(AC)

$\Rightarrow 2-5+c=0\Rightarrow c=3$ par suite $(AC): x-5y+3=0$

3) $\begin{cases}x+3y-13=0\\-x+5y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=13(1)\\x-5y=-3(2)\end{cases}$

$(1)-(2)\Rightarrow 8y=16\Rightarrow y=2$

$(1)\Rightarrow x=13-6=7$

$S_{IR^2}=\{(7,2)\}$

Donc (AI)∩(d) $=\{K(7,2)\}$

4) G le centre de gravité du triangle ABC donc elle vérifier la relation suivante : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Soit (x,y) les coordonnées de G on aura donc $x=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=3$ et $y=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{10}{3}$

5) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\\frac{7}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-x\\5-y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=\frac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow D\left(5,\frac{8}{3}\right)$

6) $5+3\times\frac{8}{3}-13=5+8-13=0\Rightarrow D\in(AI)$

11 S'ENTRAINER

1) On a : $\overrightarrow{OF}=3\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}\Rightarrow F\left(3,\frac{3}{2}\right)$,

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix};\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

$AC=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$; $AF=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ et $FC=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$

$FC^2+AF^2=AC^2$ donc le triangle ACF est rectangle en F.

2) Soit(x,y) les coordonnées du point G

$\overrightarrow{FG}=\vec{u}\Rightarrow\begin{pmatrix}x-3\\y-\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$ donc $G\left(5,\frac{3}{2}\right)$.

3) * $x_H=\dfrac{2+6}{2}=4$ et $y_H=\dfrac{\frac{5}{2}+\frac{9}{2}}{2}=\dfrac{7}{2}$ donc H $\left(4,\frac{7}{2}\right)$.

* $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (GH)

$\vec{V}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

$-1\times2+1\times2=0$ donc (d) ⊥ (GH)

4) Soit(x,y) les coordonnées du point K

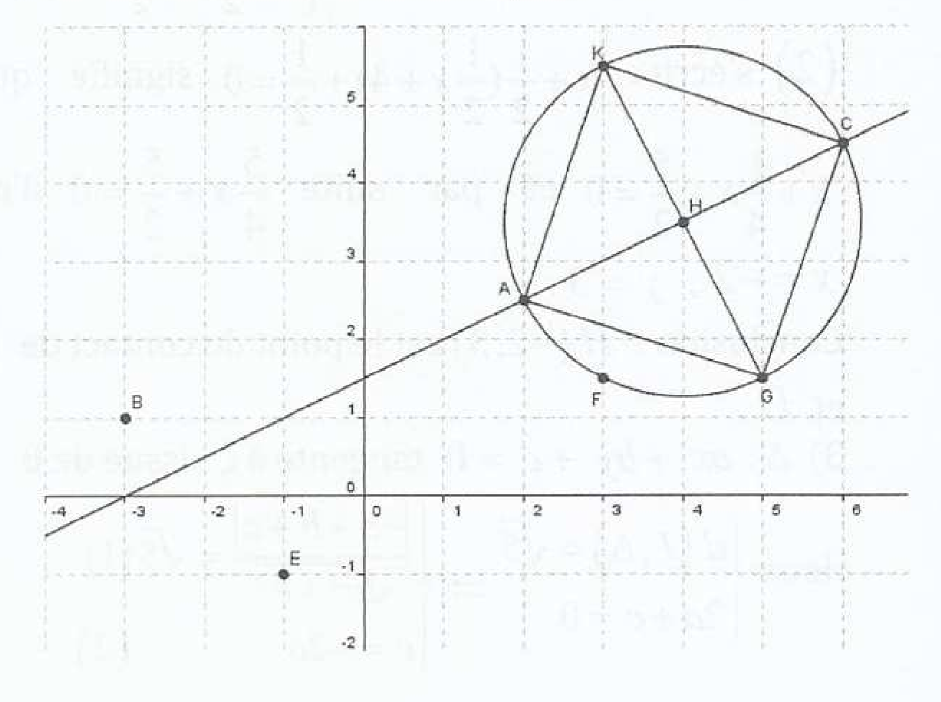
$\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{GH}\Rightarrow\begin{pmatrix}x-4\\y-\frac{7}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=\frac{11}{2}\end{cases}\Rightarrow K\left(3,\frac{11}{2}\right)$

$\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AK}=-\overrightarrow{GC}$ par suite AKCG est un parallélogramme

On remarque que les points A et C appartiennent a la droite (d)

car $2-2\times\frac{5}{2}+3=0$ et $6-2\times\frac{9}{2}+3=0$, on a (d) ⊥ (GH) signifie que (AC) ⊥ (GH) donc AKCG est un losange de plus (AG) ⊥ (AK) car $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{AK}$ donc AKCG est un carré.

5) D'après 3) H est le milieu de [AC] et [GK] donc H est le centre de carré AKCG par suite A, k, C et G appartient au cercle C de centre H est de rayon AH D'après 1) le triangle AFC est rectangle en F donc le centre de centre de cercle circonscrit associer est le milieu de [AC] qui est le point H et de rayon AH, cela confirme que le point F appartient au cercle C. Donc les points A, C, F, G et K appartient au même cercle de centre H est de rayon AH .





SE PERFECTIONNER

1) le coefficient directeur de D est $\frac{1}{2}$ d'où $D: y=\frac{1}{2}x+b$.

Or $A(4,6)\in D$ donc $6=2+b$ et par suite $b=4$ ainsi $D: y=\frac{1}{2}x+4$.

2)a) D est tangent à ς donc le rayon R du cercle ς est : $R=d(I,D)$.

Or $D:\frac{1}{2}x-y+4=0$ et $I(-1,1)$ donc $R=\frac{\left|\frac{-1}{2}-1+4\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}=\sqrt{5}$ d'où : $(x+1)^2+(y-1)^2=5$

b) $H(x,y)$ est le point de contact de ς et D ; on a ainsi :

$\begin{cases} H\in D \\ \overrightarrow{IH}\perp\vec{u} \end{cases}$ ou $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D

- $H\in D$ signifie $y=\frac{1}{2}x+4$
- $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $x+1+\frac{1}{2}(y-1)=0$

et par suite $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}=0$

On a ainsi le système suivant : $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+4 (1) \\ x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}=0 (2) \end{cases}$

(2) s'écrit : $x+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x+4)+\frac{1}{2}=0$ signifie que $x+\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}=0$ et par suite $\frac{5}{4}x+\frac{5}{2}=0$ d'où

$x=-2$; $y=3$

Conclusion : $H(-2,3)$ est le point de contact de ς et D.

3) $\Delta: ax+by+c=0$ tangente à ζ issue de B

donc $\begin{cases} d(I,\Delta)=\sqrt{5} \\ 2a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{|-a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5} (1) \\ c=-2a \quad (2) \end{cases}$

(1) donne $|-3a+b|=\sqrt{5(a^2+b^2)}$

$\Rightarrow (-3a+b)^2=5(a^2+b^2)$

$\Rightarrow 2b^2+3ab-2a^2=0$

C'est une équation de second dégrée ou l'inconnue est b.

$\Delta=9a^2+16a^2=25a^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=5|a|$ et par suite $b=\frac{-3a-5|a|}{4}$ ou bien $b=\frac{-3a+5|a|}{4}$

Donc $b=-2a$ ou bien $b=\frac{1}{2}a$.

Ainsi on a trouvé deux droites tangentes à ζ issue de B :

$\Delta: ax-2ay-2a=0$

$\Delta': ax+\frac{1}{2}ay-2a=0$



SE PERFECTIONNER

1)a) $x^2+y^2-2y-1=0 \Rightarrow x^2+(y-1)^2-2=0$

$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=2$

Donc ς et une cercle de centre $I(0;1)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$

b) $0+1-1=0 \Rightarrow I\in\Delta$

2)a) $(-1)^2+(2-1)^2=1+1=2 \Rightarrow M\in\varsigma$

b) Δ' tangente au cercle ς en $M \Rightarrow \overrightarrow{IM}$ est un vecteur normal à Δ'

$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} -1-0 \\ 2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\Delta': -x+y+c=0$ comme $M\in\Delta'$

Donc $1+2+C=0 \Rightarrow C=-3$

d'où $\Delta': -x+Y-3=0$

c) $\Delta: y=-x+1$ et $\Delta': y=x+3$

$(-1)\times 1=-1$ Donc $\Delta\perp\Delta'$

d) soit D l'autre tangente à ς et perpendiculaire à Δ comme $\overrightarrow{IM}$ est un vecteur normal de D

$D: -x+y+c=0$;

$d(I,D)=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{|1+C|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow |1+C|=2 \Rightarrow 1+C=2$

Ou $1+C=-2$

$\Rightarrow C=2$ Ou $C=-3$

$D: -x+y+1=0$ Ou $D: -x+y-3=0$

3)a) $d(G,EF)=?$

Soit H le projeter orthogonal de G sur (EF) donc (GH) est la médiatrice de $[EF]$ (car le triangle EFG est équilatéral) donc le triangle GHE est rectangle en H

D'après Pythagore : $EG^2 = GH^2 + HE^2$

$$a^2 = GH^2 + (\frac{a}{2})^2 \Leftrightarrow GH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

Donc $GH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

b) les droits sont parallèles à Δ , donc le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ de Δ est aussi un vecteur directeur pour eux.

Donc ils sont de la forme $x+y+c=0$, IAB est un triangle équilatéral donc $d(I,(AB)) = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

Or $d(I,(AB)) = \frac{|1+c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |1+c| = \sqrt{3}$

$\Rightarrow 1+c=\sqrt{3}$ ou $1+c=-\sqrt{3}$

Donc $c=-1+\sqrt{3}$ ou $c=-1-\sqrt{3}$

Par suite les équations des droites parallèles à Δ qui coupent le cercle en deux points A et B tels que IAB est un triangle équilatéral sont :

$x+y+\sqrt{3}-1=0$ et $x+y-\sqrt{3}-1=0$

Droites et plans de l'espace
Parallélisme dans l'espace

I) Résumé de cours

A) Solides usuels :volumes et section par un plan

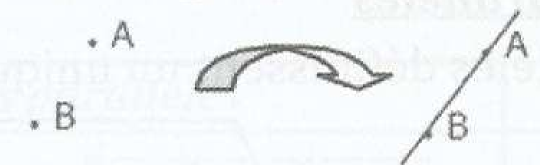
Pavé droit	**Pyramide**	**Tétraèdre**
$V = DH \times DC \times DA$	$V = \frac{1}{3} \times Base \times hauteur$	$V = \frac{1}{3} \times Base \times hauteur$
La section d'un pavé droit par **un plan parallèle àune arête** est un **rectangle**, dont l'une des dimensionscorrespond à la longueur de cette arête.	La section d'une pyramide par un **plan parallèle à la base** est une réduction de la base.	La section d'un tétraèdre par un **plan parallèle à la base** est une réduction de la base.
Sphère	**Cône de révolution**	**Cylindre de révolution**
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$V = \frac{1}{3} \times (\pi R^2) \times hauteur$	$V = \pi \times R^2 \times hauteur$
La section d'une sphère de centre O par un plan est un **cercle** de centre O'. Lorsque le plan ne passe pas par le centre de la sphère, la droite (OO') est perpendiculaire au plan de section.	La section d'une cône de révolution par un **plan parallèle à la base** est une réduction de la base.	■ La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à son axe est un cercle de même rayon que la base ■ La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe est un rectangle

B) Les règles d'incidence

1) Règles de base

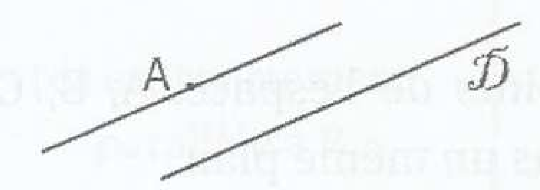
Règle 1:

Par deux points distincts A et B de l'espace, il passe une et une seule droite.



Règle 2:

On ne peut mener qu'une unique droite parallèle à une droite donnée par un point extérieur à cette droite.



Règle 3:

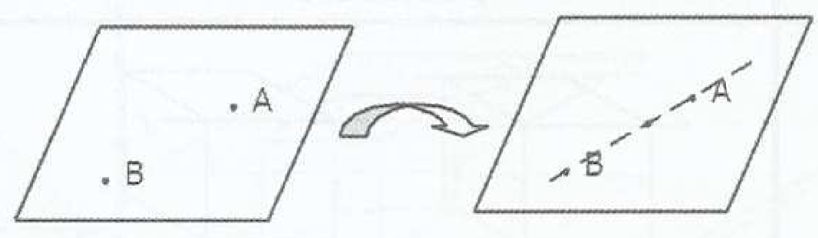
Par 3 points A,B et C distincts et non alignés de l'espace, il passe un et un seul plan (ABC).

Remarque:

Par 4 points (ou plus!) de l'espace, il ne passe pas forcément un plan. Il suffit de penser à un tabouret: un tabouret à 3 pattes sera toujours stable, ce n'est pas nécessairement le cas d'un tabouret à 4 pattes!

Règle 4:

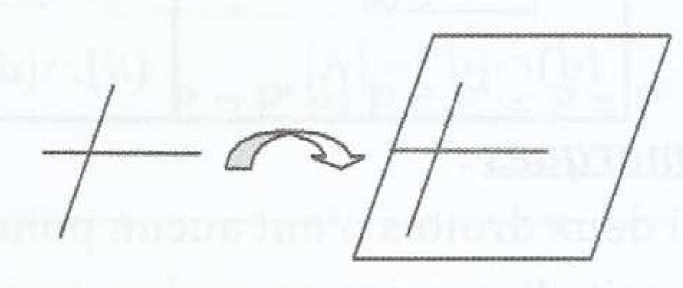
Si A et B sont deux points d'un plan P, alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan.



2) Caractérisation d'un plan

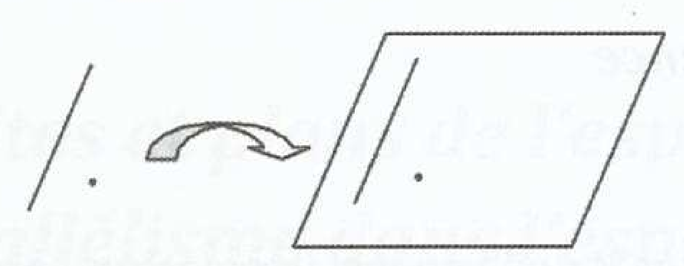
a) Deux droites sécantes

Deux droites sécantes définissent un unique plan.



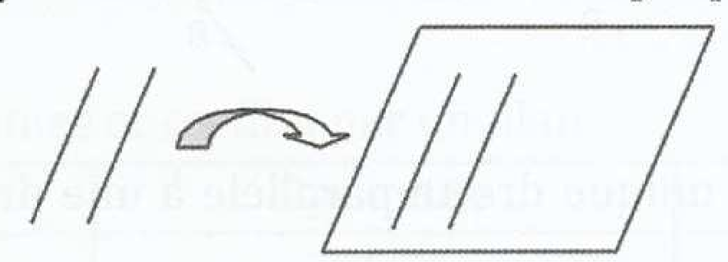
b) Une droite et un point extérieur

Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite, définissent un unique plan.



c) __Deux droites strictement parallèles__

Deux droites strictement parallèles définissent un unique plan.



__Définition:__

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. A, B, C et D sont **coplanaires** si et seulement si ils sont situés dans un même plan.

__Remarque :__

Attention, il est nécessaire de prendre 4 points pour l'étude de la coplanarité car 3 points de l'espace sont **toujours** coplanaires.

C) Positions relatives de droites et plans

1) Positions relatives de deux droites

__Définition__:

Deux droites (D) et (D') sont dites **coplanaires** lorsqu'elles sont **incluses** dans un même plan.

__Définition:__

Deux droites (D) et (D') sont dites parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes.

Droite coplanaires		**Droites non coplanaires**
sécantes	**parallèles**	
$(d)\cap(d')=\{A\}$	$(d)\cap(d')=\varnothing$ $(d)\cap(d')=(d)=(d')$	$(d)\cap(d')=\varnothing$

__Remarques__ :

- Si deux droites n'ont aucun point commun alors :
  - soit elles sont non coplanaires,
  - soit elles sont coplanaires et strictement parallèles.
- Deux droites parallèles sont toujours coplanaires.

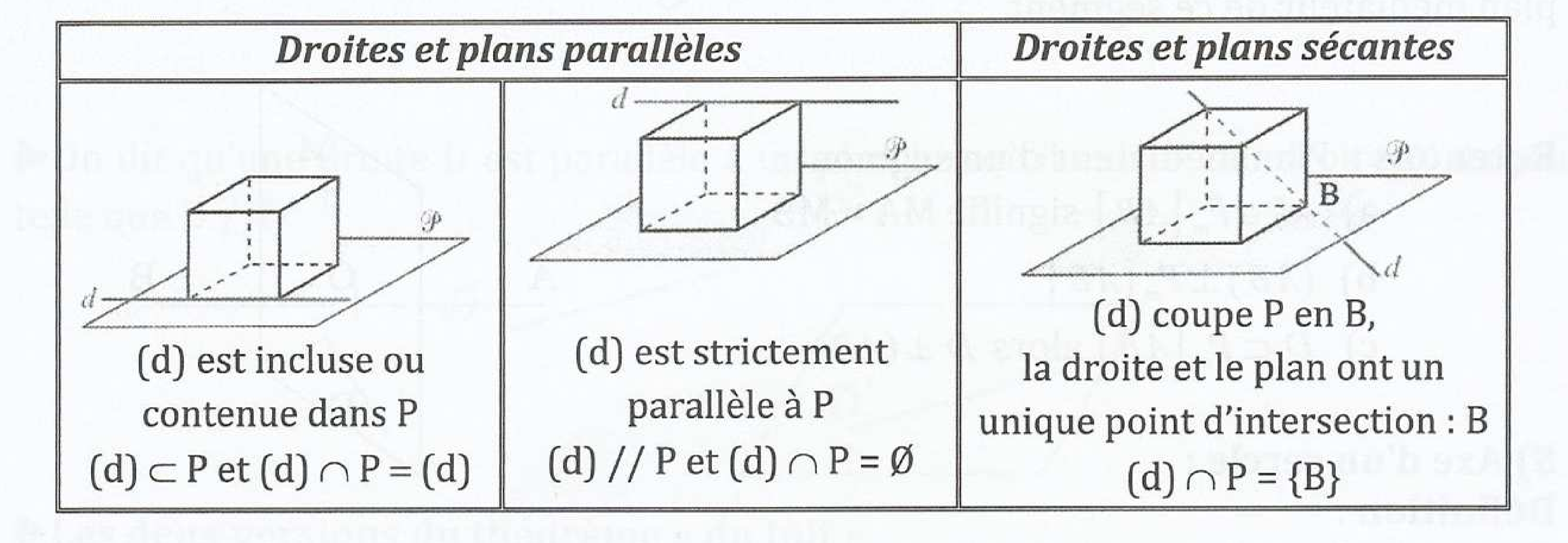


2) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définition :

■ Une droite de l'espace et un plan sont sécants lorsqu'ils ont un seul point commun.

■ Lorsqu'ils ne sont pas sécants, on dit que la droite est parallèle au plan.



Définition :

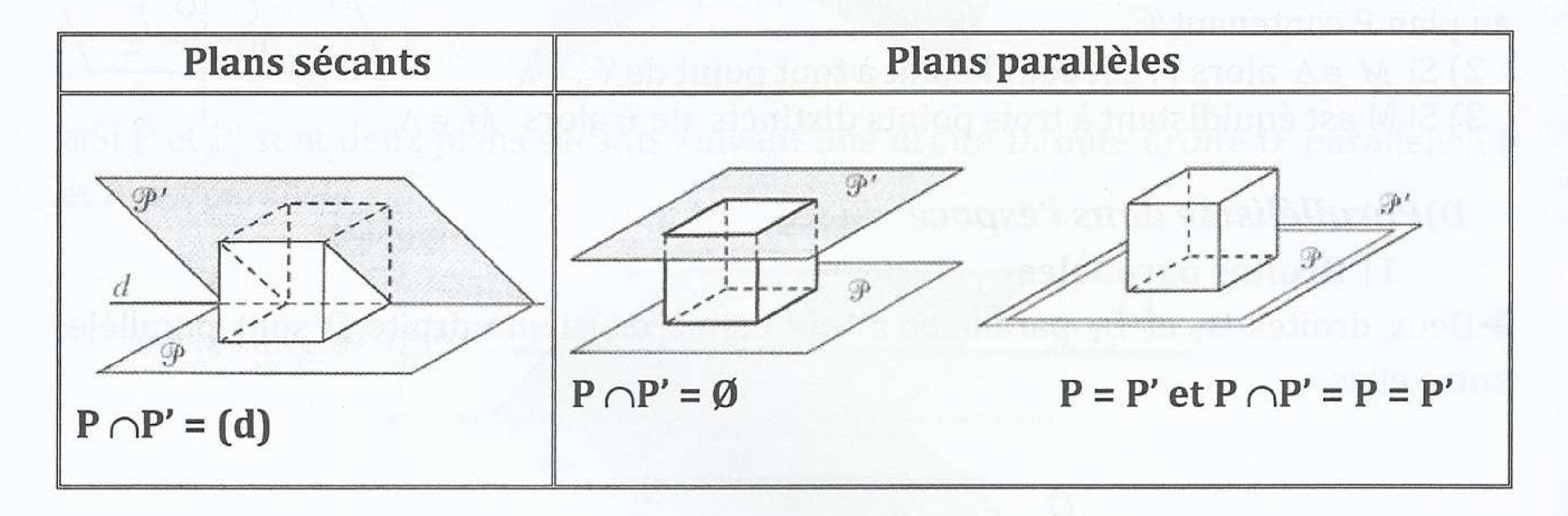
Une droite (d) est parallèle à un plan P signifie que le plan P contient au moins une droite parallèle à (d)

3) Positions relatives de deux plans

Définition :

Deux plans de l'espace sont sécants lorsqu'ils ont une seule droite commune.

Quand deux plans ne sont pas sécants, on dit qu'ils sont parallèles.

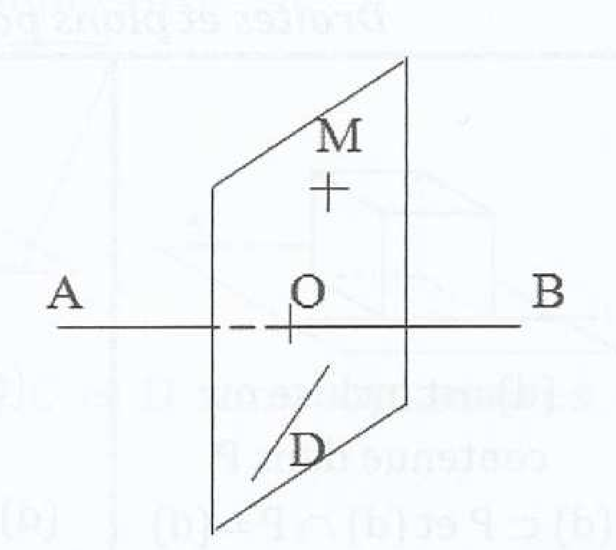


4) Plan médiateur d'un segment :

Définition :

On appelle le plan médiateur d'un segment le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu

Théorème : L'ensemble des points équidistant des extrémités d'un segment est le plan médiateur de ce segment.



Retenons : Plan médiateur d'un segment :

a) $M \in P_m[AB]$ signifie MA = MB

b) $(AB) \perp P_m[AB]$

c) $D \subset P_m[AB]$ alors $D \perp (AB)$

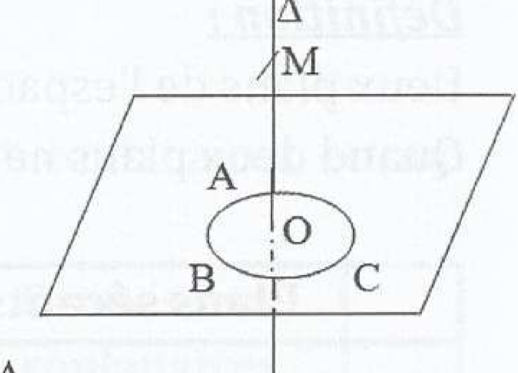
5) Axe d'un cercle :

Définition :

On appelle l'axe d'un cercle la droite passant par le centre de ce cercle et perpendiculaire à son plan.

Théorème : L'ensemble des points équidistant de tous les points d'un cercle est l'axe de ce cercle

Remarque : Pour montrer q'un point appartient à l'axe d'un cercle C il suffit de montrer q'il équidistant à trois points distincts du cercle C.



Retenons : Axe d'un cercle $\mathscr{C}(O,r)$

1) Δ est la droite passant par O et perpendiculaires au plan P contenant $\mathscr{C}$.

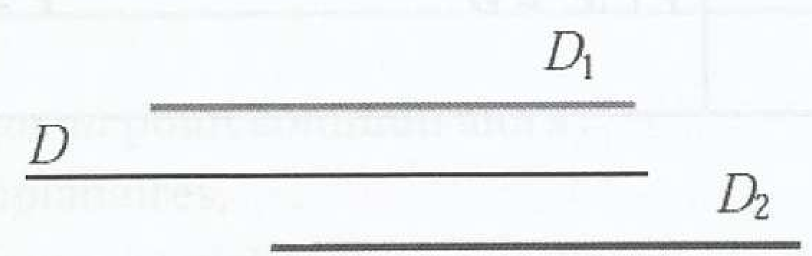
2) Si $M \in \Delta$ alors M est équidistant à tout point de $\mathscr{C}$.

3) Si M est équidistant à trois points distincts de $\mathscr{C}$ alors $M \in \Delta$

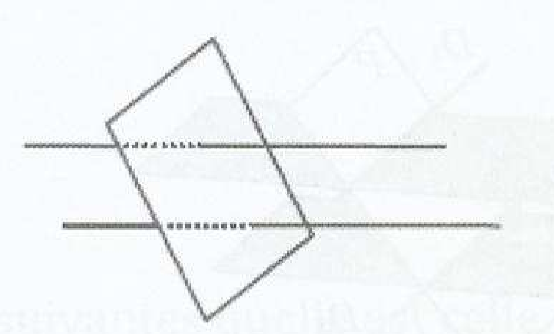
D)Parallélisme dans l'espace

1) Droites parallèles

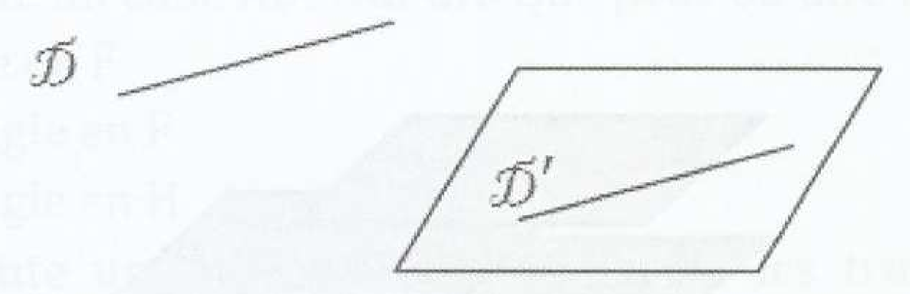
▶Deux droites D_1 et D_2 parallèles à une même troisième droite D sont parallèles entre elles.



▶Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

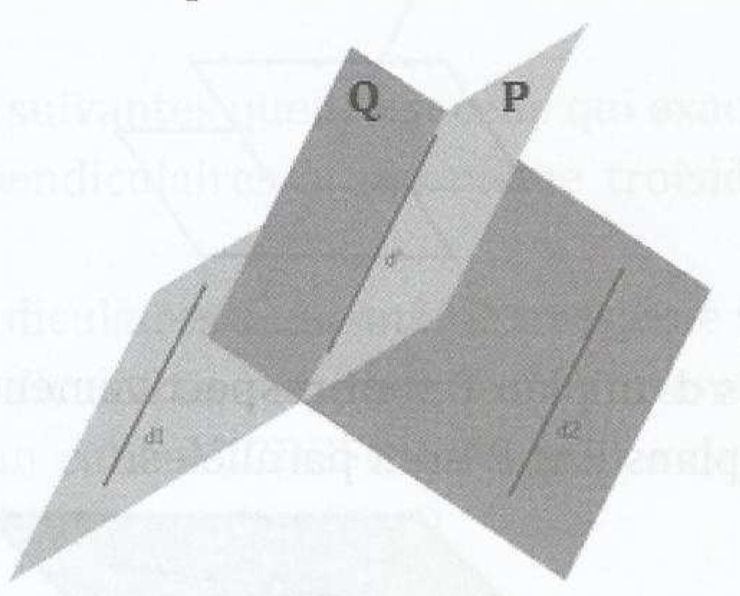


▶On dit qu'une droite D est parallèle à un plan lorsqu'il existe une droite D' du plan telle que D //D'.

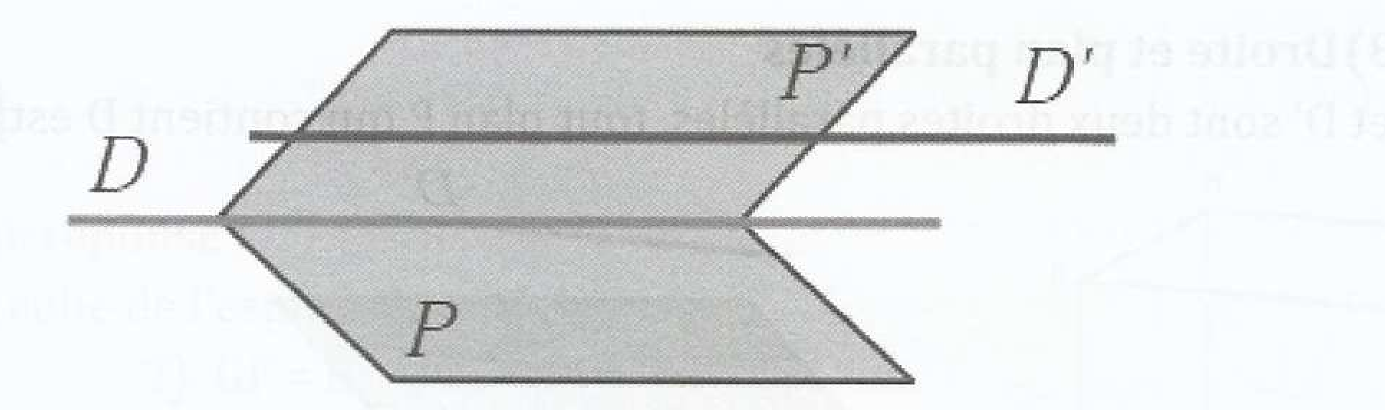


▶**Les deux versions du théorème « du toit »**

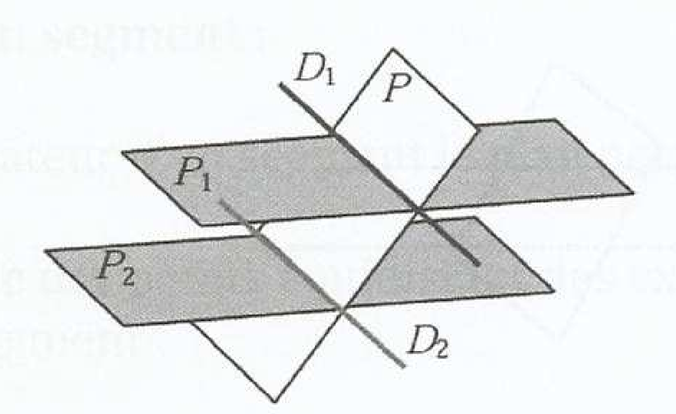
■Si deux droites d_1 et d_2 parallèles et situées dans deux plans sécants P et Q respectivement alors d_1 et d_2 sont parallèles à d' l'intersection de P et Q.



■Si P et P' sont deux plans sécants suivant une droite D,toute droite D' parallèle à P et P' est parallèle à D.

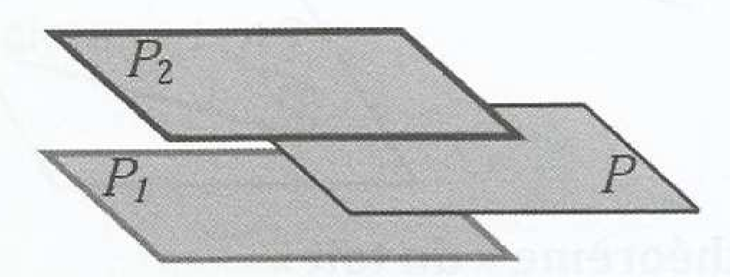


▶Si P_1 et P_2 sont deux plans parallèles, tout plan P qui coupe P_1coupe aussi P_2 et les droites d'intersection D_1 et D_2 sont parallèles.

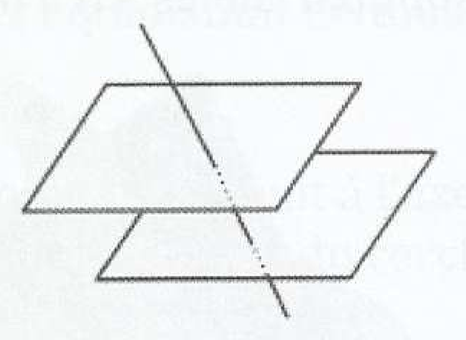


2) Plans parallèles

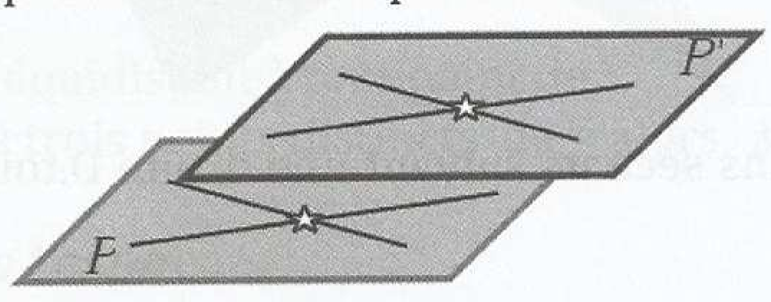
▶Deux plans P_1 et P_2 parallèles à un même troisième plan P sont parallèles entre eux.



▶Si deux plans sont parallèles, alors toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.

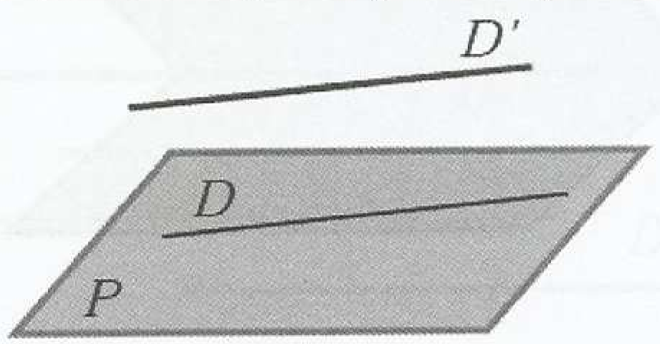


▶Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan P', les plans P et P' sont parallèles.



3) Droite et plan parallèles

▶Si D et D' sont deux droites parallèles, tout plan P qui contient D estparallèle à D'.

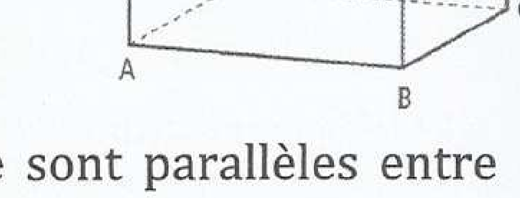


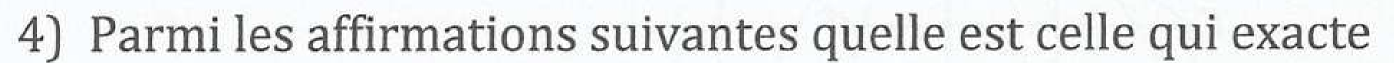
II) Exercices :



Q-C-M

1) Parmi les affirmations suivantes quelle est celle qui exacte
   a) Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur intersection
   b) Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles entre eux
   c) Deux plans parallèles à une même droite sont parallèles entre eux
2) La figure représente un cube ABCDEFGH. Que peut-on dire du triangle FDH ?
   a) FDH est isocèle en F
   b) FDH est rectangle en F
   c) FDH est rectangle en H
3) La figure représente un cube ABCDEFGH. Parmi les trois droites suivantes, quelle est celle qui est orthogonal à (AD) ?
   a) (CH)
   
   b) (CF)
   c) (BG)





4) Parmi les affirmations suivantes quelle est celle qui exacte
   a) Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles
   b) Deux plans perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre eux
   c) Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux
5) La figure représente un cube ABCDEFGH. Parmi les droites suivantes quelle est celle qui est perpendiculaire au plan (EBC)
   a) (CF)
   b) (DG)
   c) (AH)



Q-C-M

Cocher la bonne réponse :

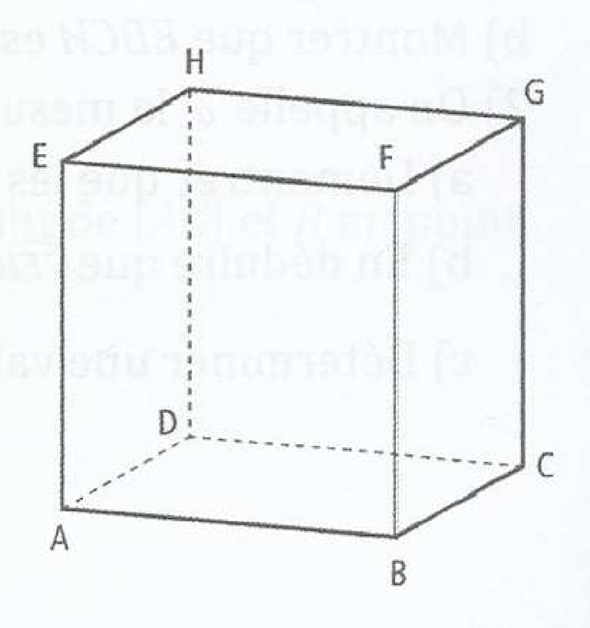
ABCDEFGH un cube de l'espace de coté 4cm

1) GF = 4 2) GF = 6 3) GF = 10

1) AF = $2\sqrt{2}$ 2) AF = $3\sqrt{3}$ 3) AF = $4\sqrt{2}$

1) AG = $4\sqrt{2}$ 2) AG = $4\sqrt{3}$ 3) AG = $5\sqrt{3}$

La surface de EFB =



1) 8 2) 6 3) 10

Le volume de la pyramide EFBG =

1) $\frac{35}{3}$ 2) $\frac{32}{3}$ 3) $\frac{37}{3}$

On note I le milieu de [EG], la distance BI =

1) $2\sqrt{6}$ 2) $2\sqrt{5}$ 3) $4\sqrt{3}$

La surface de EBG =

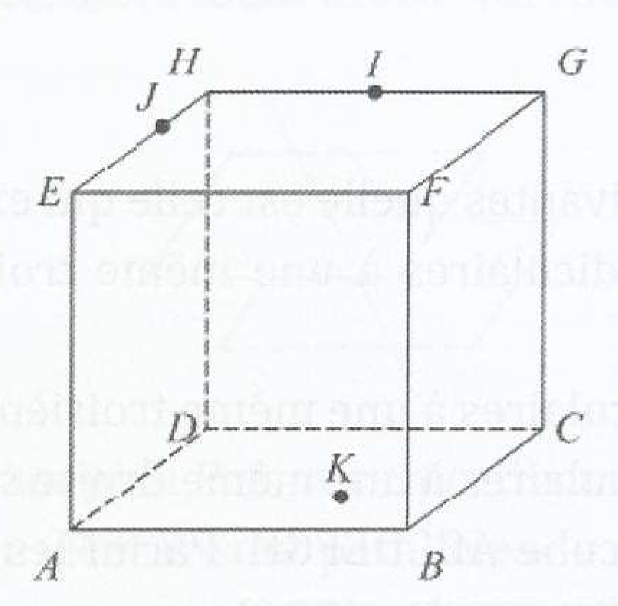
1) $6\sqrt{3}$ 2) $7\sqrt{3}$ 3) $8\sqrt{3}$



3 APPLIQUER

ABCDEFGH est un cube. *I* et *J* sont deux points des arêtes [*GH*] et [*EH*], et *K* est dans le plan (*BCD*).

1. Construire l'intersection des plans (*ABC*) et (*IJK*). Justifier la construction.
2. Tracer la section du cube par le plan (*IJK*).





4 APPLIQUER

Soit *ABCDEFGH* un cube d'arêtes de longueur *a* et *O* le centre du carré *ABCD*. Soit *I* le milieu du segment [*AB*].

1) a) Démontrer que la droite (*EH*) est orthogonale au plan (*ABF*).

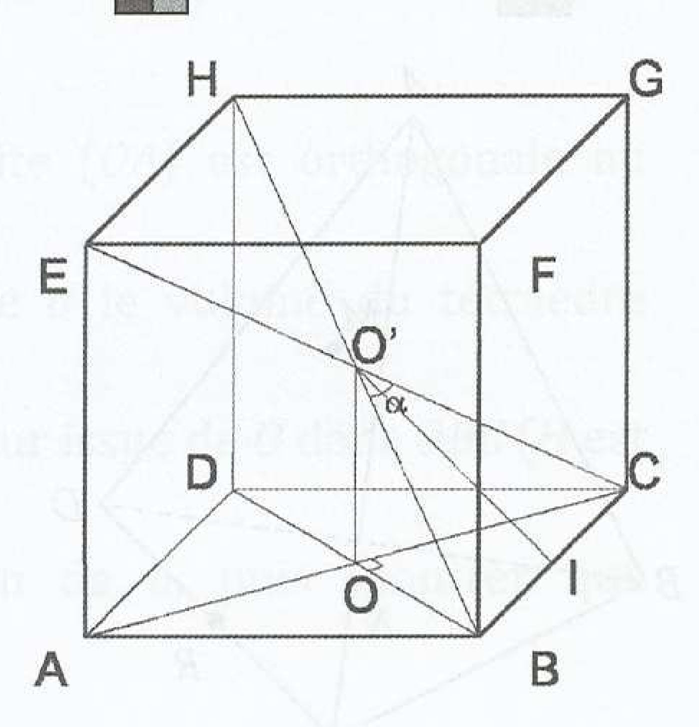
b) Montrer que *EBCH* est un rectangle. Ses diagonales se coupent en *O*'.

2) On appelle α la mesure de l'angle $\widehat{BO'C}$.

a) Démontrer que les droites (*O'I*) et (*EB*) sont parallèles.

b) En déduire que $\widehat{CEB} = \frac{\alpha}{2}$.

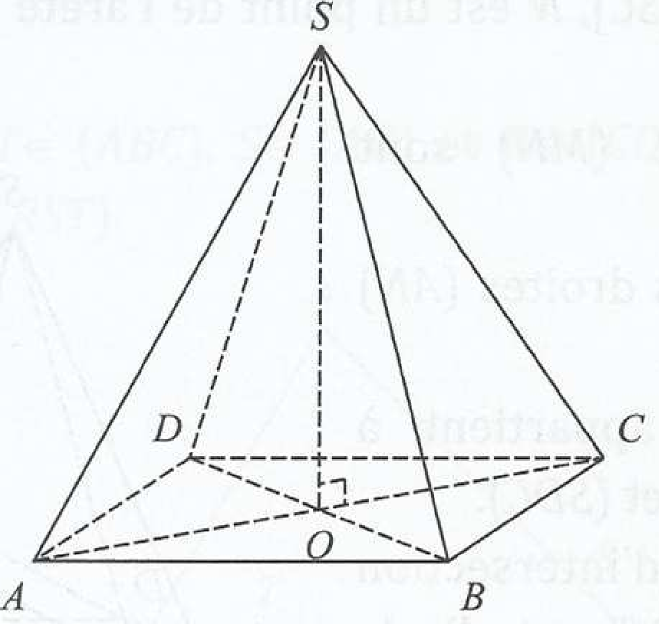
c) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.





APPLIQUER

SABCD est une pyramide régulière à base carrée dont toutes les arêtes mesurent a. O est le centre de $ABCD$ et $[SO]$ est la hauteur de la pyramide



1) Exprimer AC et AO en fonction de a.

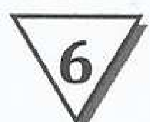
2) Montrer que $SO = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Déterminer, en fonction de a, le volume de $SABCD$.

4) Calculer ce volume lorsque $a = \sqrt{2}$ cm.

NB : on conservera les valeurs exactes.

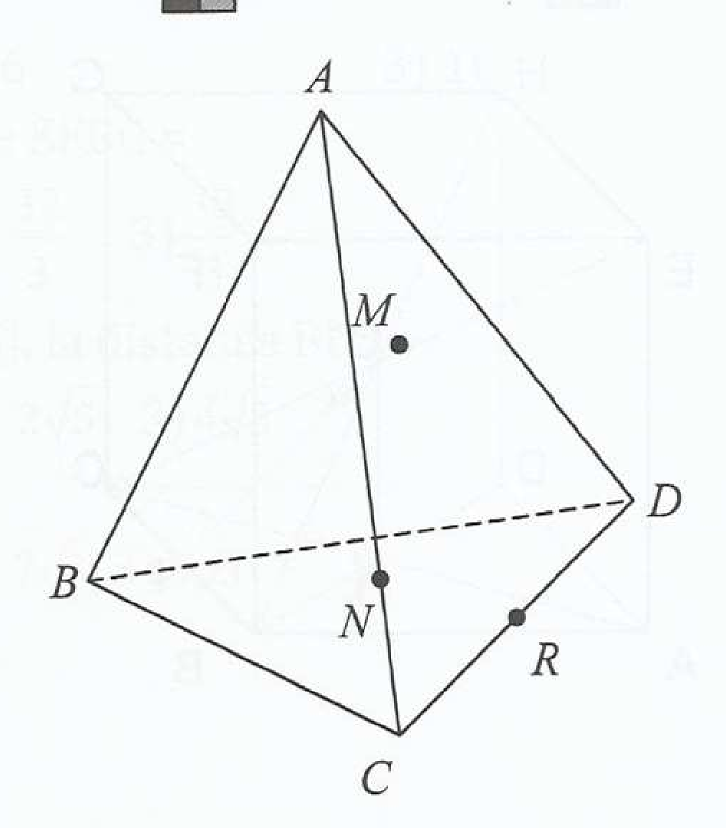
5) Lorsque $a = \sqrt{2}$ cm, Volume($SABCD$) = $\frac{\sqrt{2}^3 \times \sqrt{2}}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ cm³.



APPLIQUER

ABCD est un tétraèdre. M est un point de la face ABD, N un point de $[AC]$ et R un point de $[CD]$.

Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (MNR).





APPLIQUER

SABCD est une pyramide de sommet *S* et dont la base *ABCD* est un parallélogramme.
M est un point de l'arête [*SC*], *N* est un point de l'arête [*SB*], et (*MN*) est parallèle à (*BC*).

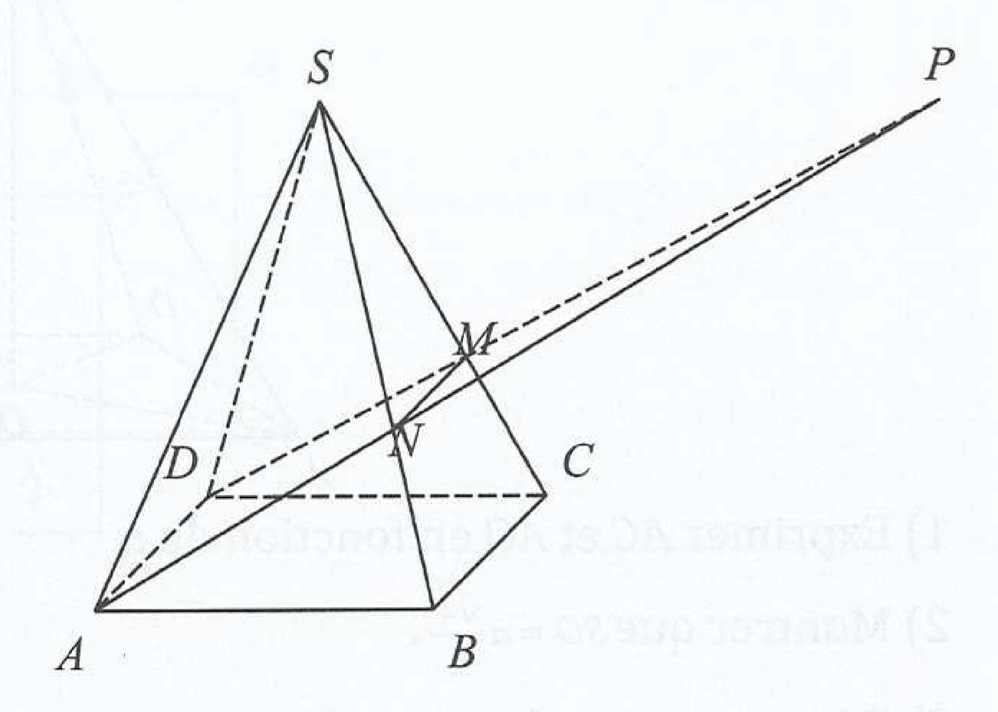
1) Montrer que (*AD*) et (*MN*) sont parallèles.

2) Dans le plan (*ADM*), les droites (*AN*) et (*DM*) se coupent en *P*.

   a) Démontrer que *P* appartient à chacun des plans (*SAB*) et (*SDC*).

   b) Pourquoi la droite d'intersection des plans (*SAB*) et (*SDC*) est-elle la droite (*SP*) ?

3) En déduire que (*SP*) est parallèle à (*AB*) et à (*CD*).





S'ENTRAINER

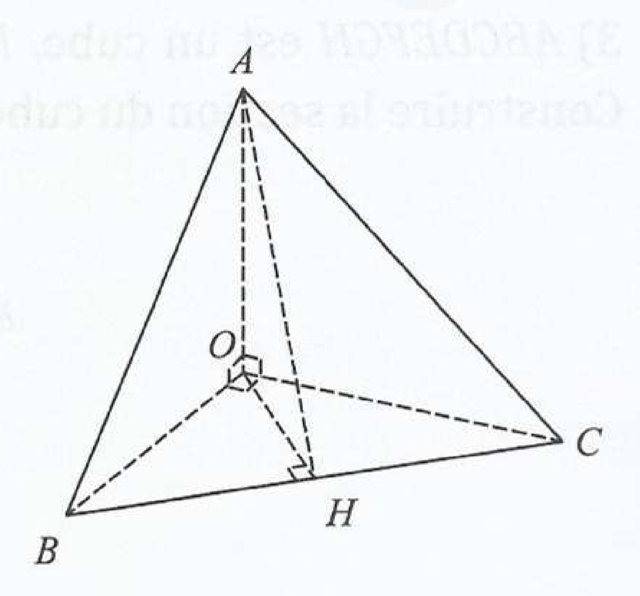
ABCD est un tétraèdre. *I* est le milieu de [*AB*], *J* est le milieu de [*AC*] et *K* est le point de [*AD*] tel que $AK = \frac{1}{4} AD$.

Démontrer que (*IJ*) est parallèle (*BC*).



S'ENTRAINER

OABC est un tétraèdre dont les faces *OAB*, *OAC* et *OBC* sont des triangles rectangles isocèles en *O*, et *ABC* est un triangle équilatéral. On pose *OA* = *OB* = *OC* = *a* (on a donc $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$).



1) Démontrer que la droite (OA) est orthogonale au plan (OBC).

2) Calculer en fonction de a le volume du tétraèdre $OABC$.

3) H est le pied de la hauteur issue de O dans OBC (H est donc le milieu de $[BC]$).

Exprimer OH en fonction de a, puis montrer que $AH = a\frac{\sqrt{6}}{2}$.

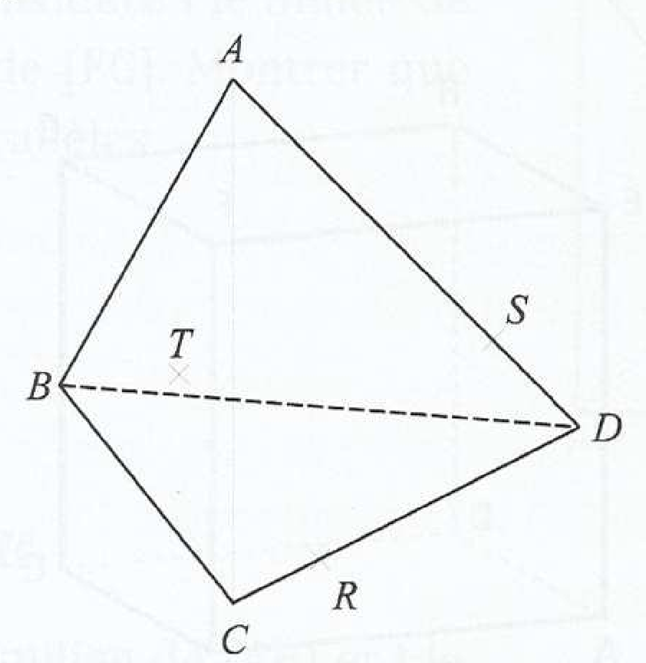
4) Calculer l'aire du triangle ABC.

5) Déduire des questions 2. et 4. La longueur de la hauteur issue de O du tétraèdre $OABC$.

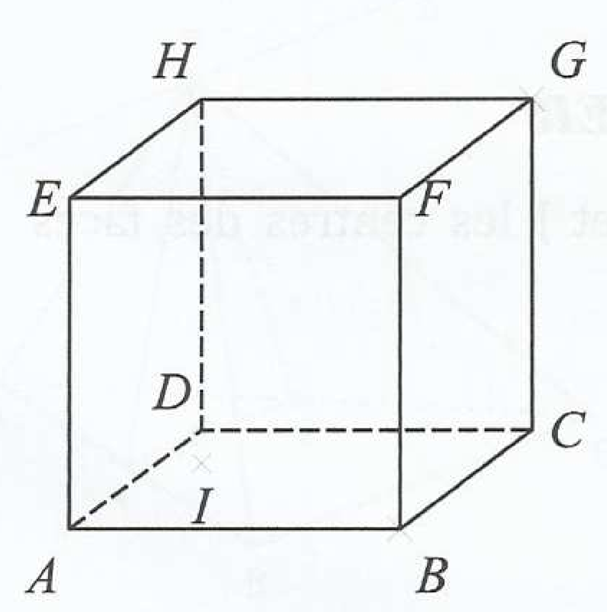


S'ENTRAINER

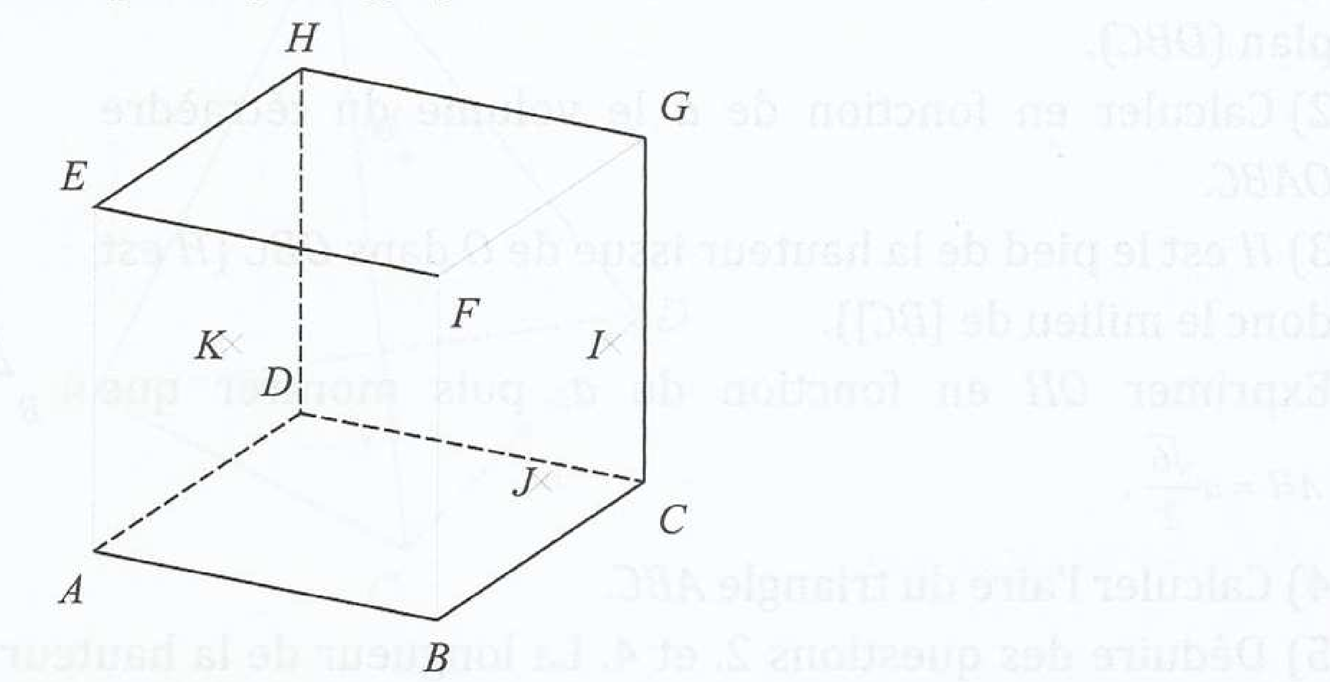
1) $ABCD$ est un tétraèdre, $T \in (ABC)$, $S \in [AD]$ et $R \in [CD]$. Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (RST).



2) $ABCDEFGH$ est un cube, et I est dans la face $ABFE$. Construire la section du cube par le plan (IBG).



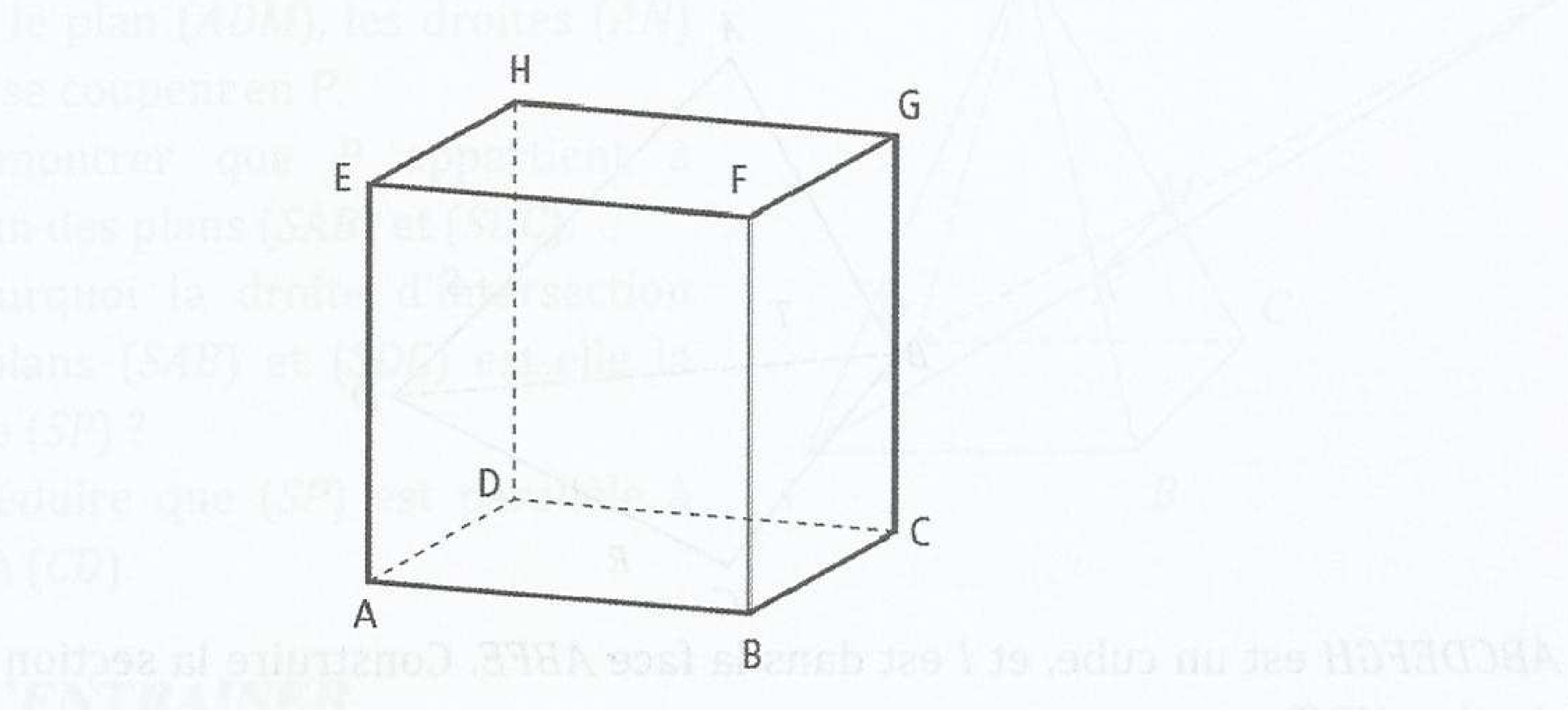
3) *ABCDEFGH* est un cube, *I* et *J* sont dans la face *BCGF*, et *K* est dans la face *ABFE*. Construire la section du cube par le plan (IJK).





S'ENTRAINER

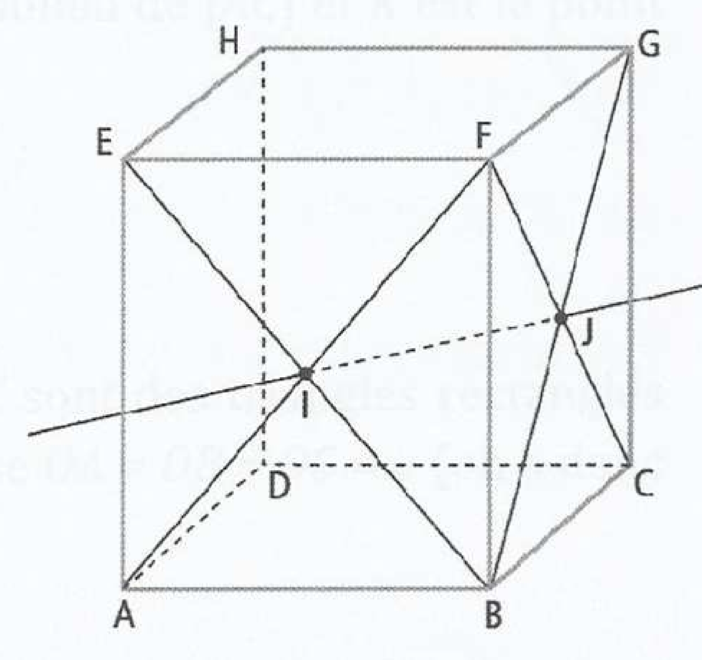
Dans le cube ci-dessous, déterminer :
$(AC)\cap(EFGH)$,$(BG)\cap(EFGH)$,$(EF)\cap(EFGH)$,$(AB)\cap(EFGH)$ et$(BF)\cap(EFGH)$.





SEPERFECTIONNER

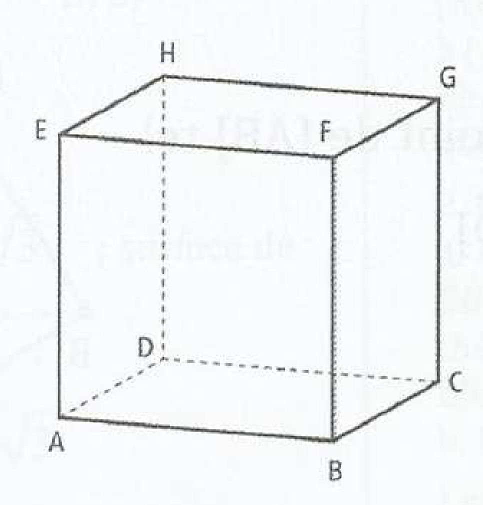
Dans le cube, on appelle I et J les centres des faces ABFE et BCGF. Montrer que :
(IJ) // (EFG).





SEPERFECTIONNER

Dans le cube ABCDEFGH,

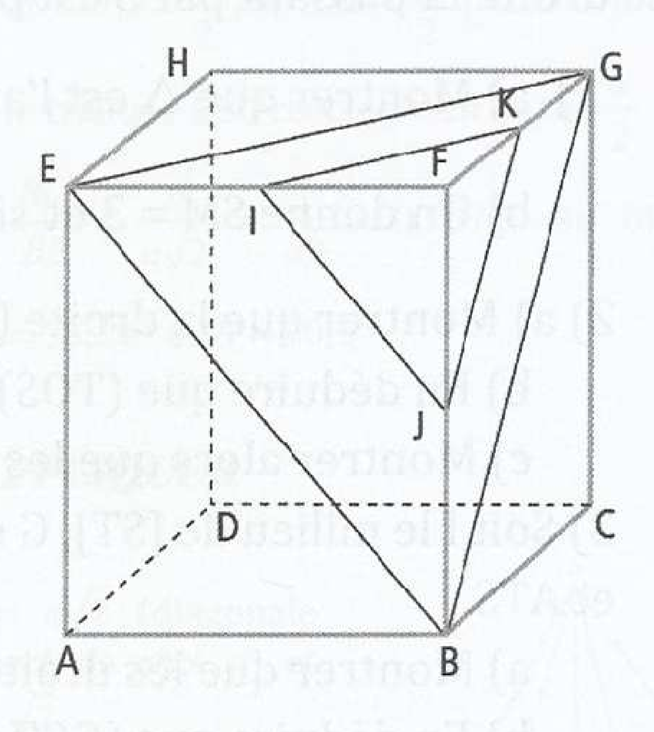


Déterminer :
$(FGCB)\cap(EFGH), (EBC)\cap(EFGH), (ABCD)\cap(EFGH), (EFG)\cap(EFGH)$.



SEPERFECTIONNER

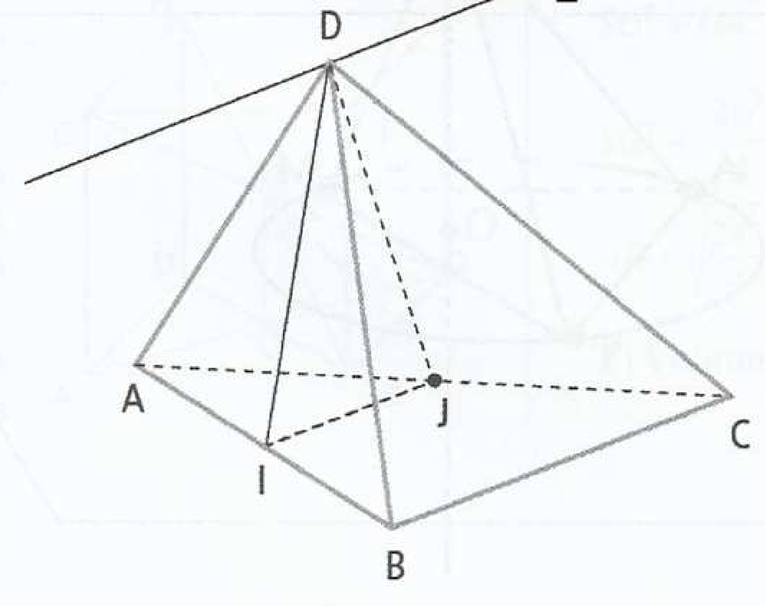
Dans le cube ABCDEFGH, on considère I le milieu de [EF], J celui de [BF] et K celuide [FG]. Montrer que les plans (EBG) et (IJK) sont parallèles.





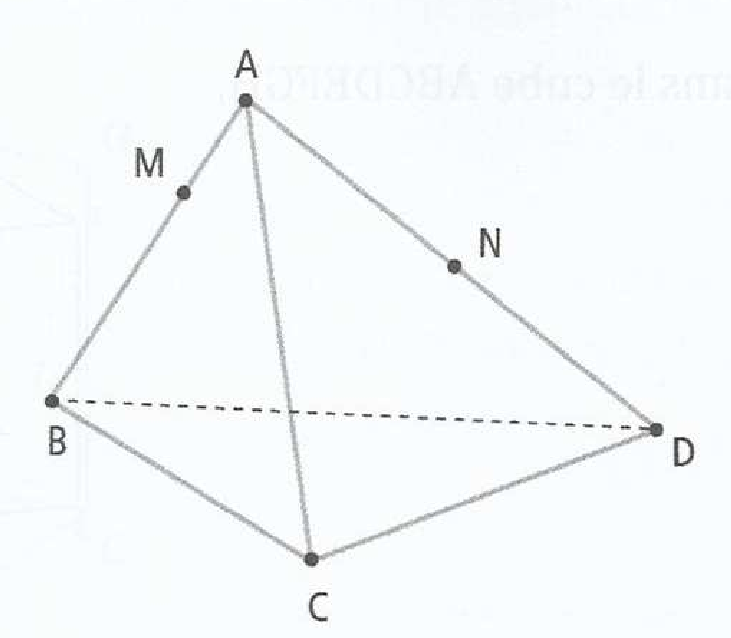
SEPERFECTIONNER

ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. Déterminer l'intersection des plans (BCD) et (IJD).





SEPERFECTIONNER



Soient ABCD un tétraèdre, M un point de [AB] tel que $AM = \frac{1}{3}AB$ et N le milieu de [AD].

Déterminer : $(MN) \cap (BCD)$.



SEPERFECTIONNER

On considère la figure ci-dessous où SATM est un tétraèdre tel que les faces SAT et STM sont des triangles équilatéraux.

La droite Δ passant par S est perpendiculaire au plan P en un point O.

1) a) Montrer que Δ est l'axe du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ATM.

b) On donne SM = 3 et $\sin(\widehat{AMT}) = \frac{3}{4}$; calculer le rayon R du cercle $\mathscr{C}$ et SO.

2) a) Montrer que la droite (TO) est perpendiculaire à (AM).

b) En déduire que (TOS) est le plan médiateur du segment [AM].

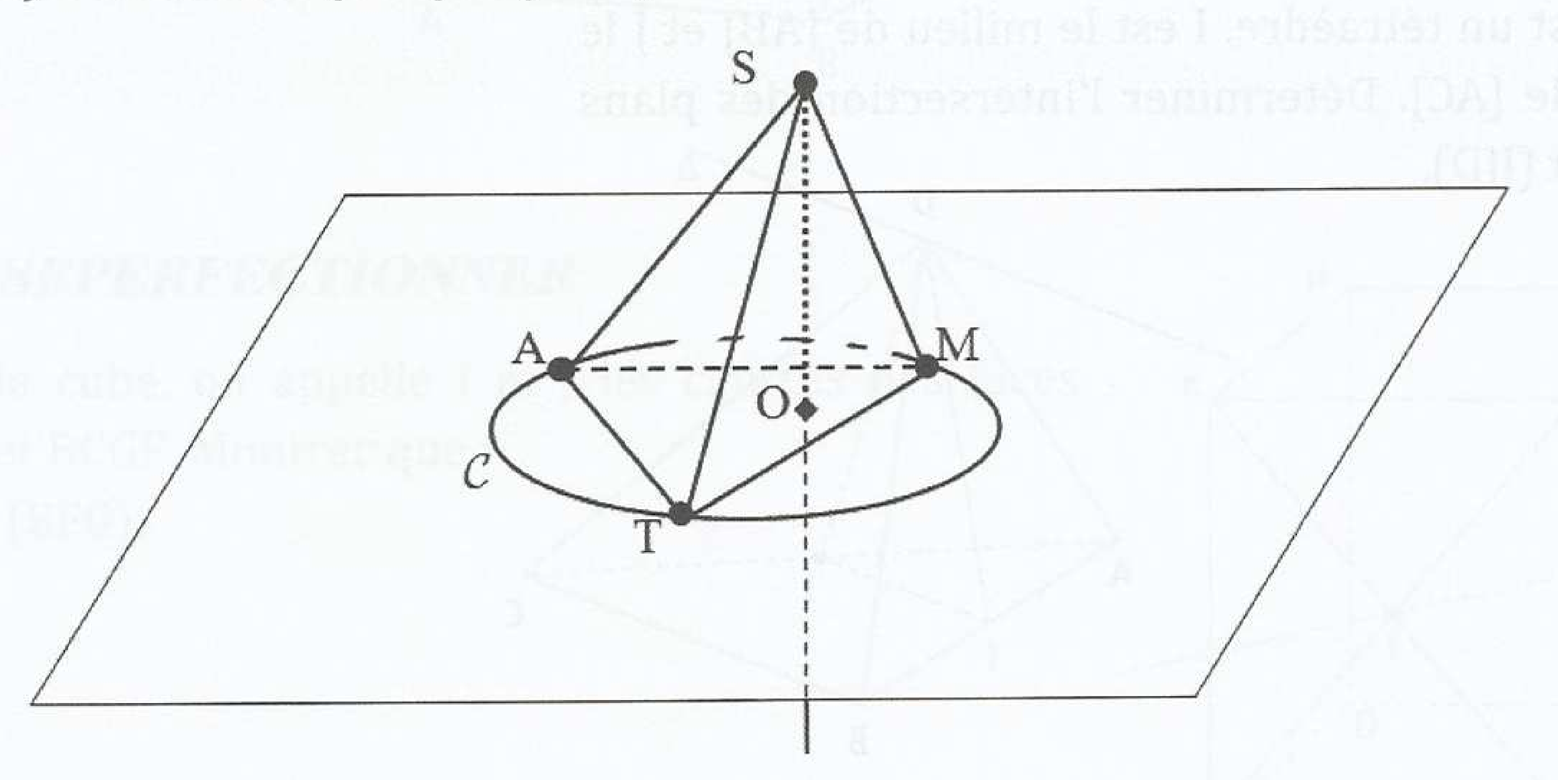
c) Montrer alors que les plans (STO) et (SAM) sont perpendiculaires.

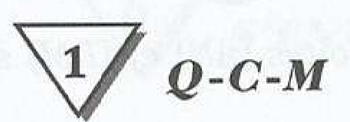
3) Soit I le milieu de [ST], G et G' les centres de gravité respectifs des triangles STM et ATS.

a) Montrer que les droites (GG') et (AM) sont parallèles.

b) En déduire que (GG') est orthogonale à (ST)

c) Déterminer $(SAO) \cap (SGG')$.





1 Q-C-M

1) a) 2) c) 3) a) 4) c) 5) b)

2 Q-C-M

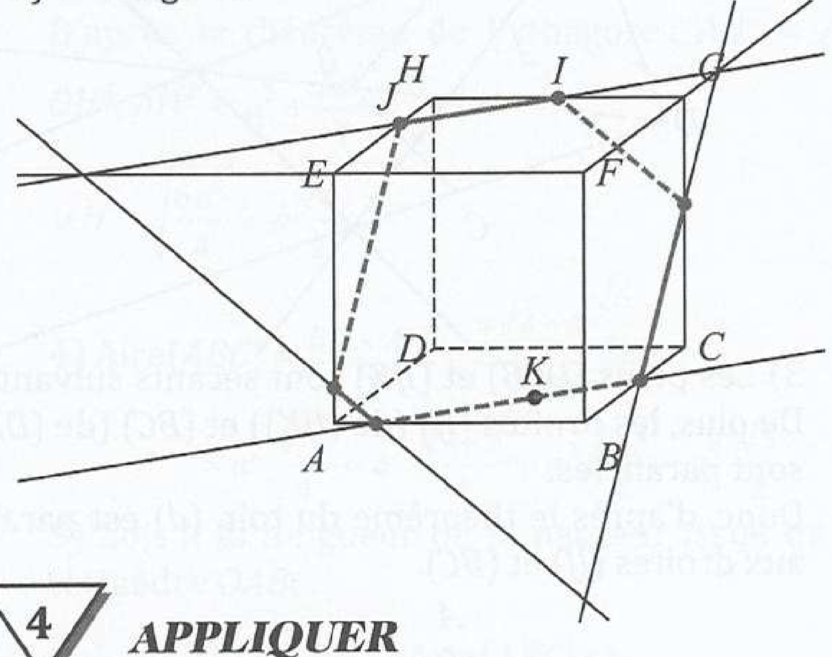
GF = 4 ; AF = $4\sqrt{2}$; AG = $4\sqrt{3}$; surface de EFB = 8 ; le volume de EFBG = $\dfrac{32}{3}$;

BI = $2\sqrt{6}$; la surface de EBG = $8\sqrt{3}$

3 APPLIQUER

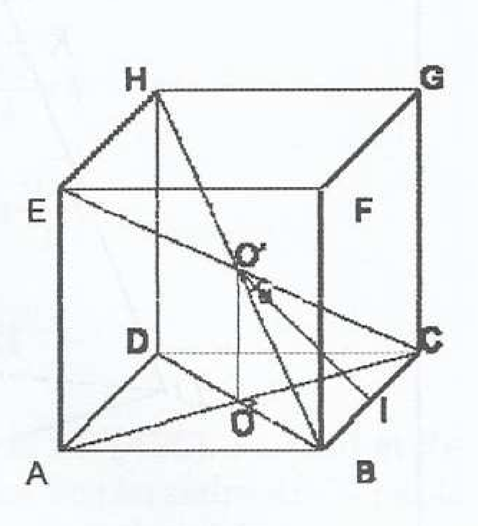
1) Les points I et J appartiennent aux plans (EFG) et (IJK), donc la droite (IJ) est l'intersection des plans (EFG) et (IJK). De plus, comme $ABCDEFGH$ est un cube, les plans (ABC) et (EFG), donc le plan (IJK) coupe ces deux plans, et les droites d'intersection sont parallèles. La droite d'intersection des plans (IJK) et (ABC) est donc la parallèle à (IJ) passant par K.

2) Voir figure.



4 APPLIQUER

1) a) Comme $ABCDEFGH$ est un cube, la droite (EH) est perpendiculaire aux droites (EF) et (EA), sécantes dans le plan (ABF). Donc (EH) est orthogonale au plan (ABF).



b) $BCGF$ et $FGEH$ étant des carrés, on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$. On obtient donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$, ce qui prouve que $EBCH$ est un parallélogramme.

De plus, comme (EH) est orthogonale au plan (ABF), alors (EH) est en particulier perpendiculaire à (EB).

Le parallélogramme $EFGH$ a donc un angle droit, ce qui prouve que c'est un rectangle.

2. On appelle α la mesure de l'angle $\widehat{BO'C}$.

a. O' est le milieu de [CE] (car centre du rectangle $EBCH$) et I est le milieu de [BC]. En appliquant le théorème des milieux au triangle BCE, on obtient bien que les droites (IO') et (BE) sont parallèles.

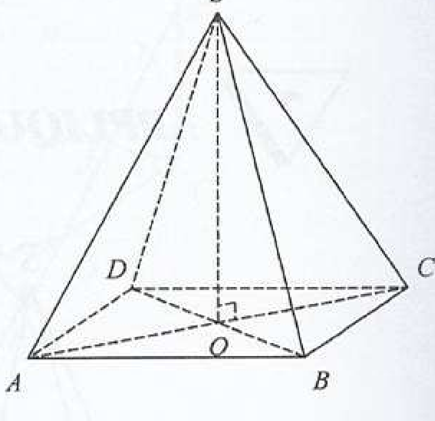
b. Les droites ($O'I$) et (BE) sont parallèles.

Les angles correspondants $\widehat{CEB}$ et $\widehat{CO'I}$ sont donc égaux.

De plus, $BH = CE$ (diagonales du rectangle $EBCH$), donc $BO' = O'C$ et $BO'C$ est isocèle en O'. I étant le milieu de [BC], ($O'I$) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BO'C}$, et $\widehat{CO'I} = \dfrac{\alpha}{2}$, et $\widehat{CEB} = \dfrac{\alpha}{2}$ (= $\widehat{CO'I}$).

c. Dans le triangle EBC rectangle en B, tan $\dfrac{\alpha}{2}$ = tan $\widehat{CEB} = \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071$. On obtient donc $\dfrac{\alpha}{2} \approx 35{,}26°$ et $\alpha \approx 70{,}5°$.

5 APPLIQUER



1) $AC = a\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté a) et $AO = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (car O est le centre du carré $ABCD$).

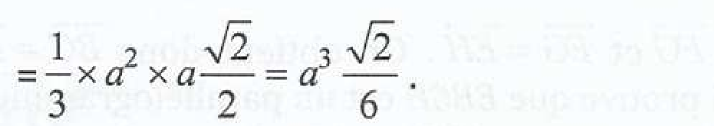
2) Dans le triangle SAO, d'après le théorème de Pythagore :

$SO^2 + OA^2 = SA^2$, $SO^2 + (a\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 = a^2$,

$SO^2 + \dfrac{2a^2}{4} = a^2$, $SO^2 = a^2 - \dfrac{2a^2}{4} = \dfrac{4a^2}{4} - \dfrac{2a^2}{4} = \dfrac{2a^2}{4}$,

$SO = \sqrt{\dfrac{2a^2}{4}} = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Volume ($SABCD$) = $\dfrac{1}{3}$ ×Air ($ABCD$) ×SO



$= \frac{1}{3} \times a^2 \times a\frac{\sqrt{2}}{2} = a^3\frac{\sqrt{2}}{6}$.

4. Lorsque $a = \sqrt{2}$ cm , Volume$(SABCD)$

$= \frac{\sqrt{2}^3 \times \sqrt{2}}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ cm³.



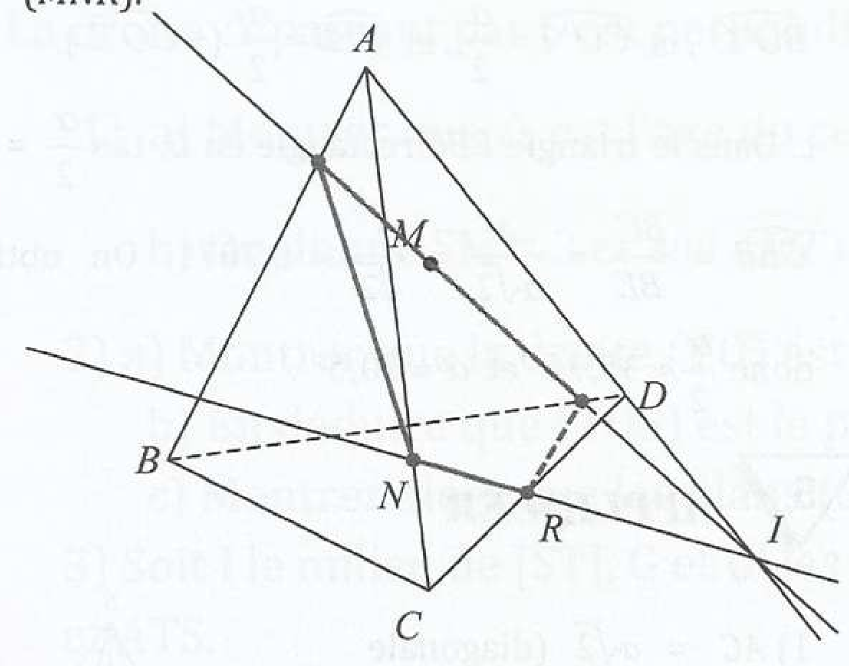
6 APPLIQUER

Il est évident que la droite (NR) est l'intersection des plans (MNR) et (ACD).

M est un point de la face ABD, et les droites (NR) (de (ACD)) et (AD) (de (ABD)) se coupent en I (car sécantes dans le plan (ACD)).

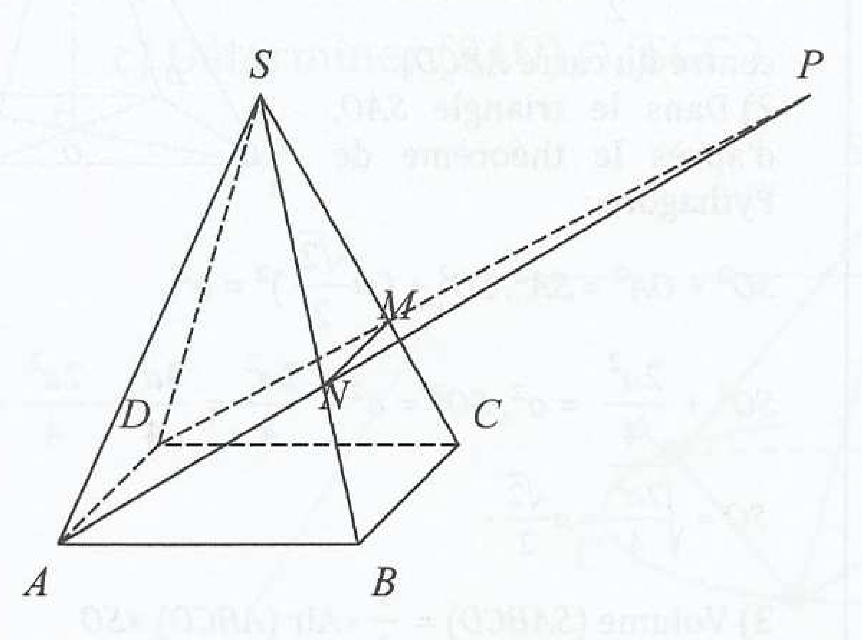
La droite (MI) est donc l'intersection des plans (MNR) et (ABD).

(MI) coupe les arêtes $[BD]$ et $[AB]$, ce qui permet d'obtenir la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (MNR).





7 APPLIQUER



1. (AD) et (MN) sont parallèles à la droite (BC), donc elles sont parallèles.

2. Dans le plan (ADM), les droites (AN) et (DM) se coupent en P.

a. La droite (AN) appartient au plan (SAB), donc P aussi (car $P \in (AN)$).

La droite (DM) appartient au plan (SDC), donc P aussi (car $P \in (DM)$).

b. S et P appartiennent aux plans (SAB) et (SDC), donc la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC) est la droite (SP)

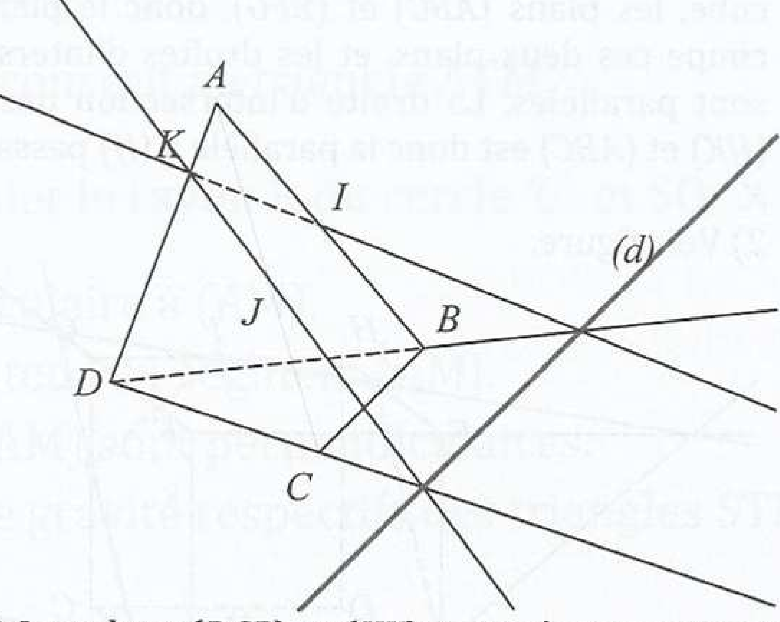
c. (AB) (du plan (SAB)) et (CD) (du plan (SDC)) sont parallèles donc, d'après le théorème du toit, elles sont parallèles également à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire la droite (SP).



8 S'ENTRAINER

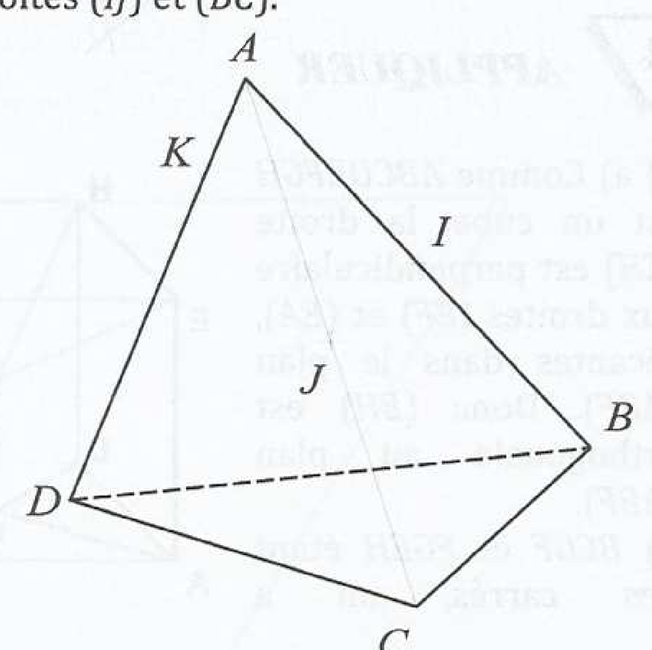
1) Dans le triangle ABC, I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$ donc, d'après le théorème des milieux, (IJ) est parallèle (BC).

2) Voir figure ci-contre.



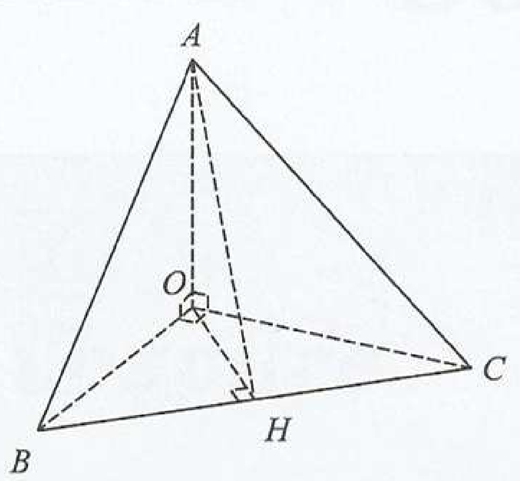
3) Les plans (DCB) et (IJK) sont sécants suivant (d). De plus, les droites (IJ) (de (IJK)) et (BC) (de (DBC)) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème du toit, (d) est parallèle aux droites (IJ) et (BC).





S'ENTRAINER



1) (OA) est perpendiculaires aux droites (OB) et (OC) (sécantes dans le plan (OBC)), donc (OA) est orthogonale au plan (OBC).

2) Volume$(OABC) = \frac{1}{3} \times$Aire$(OBC) \times AO$

$= \frac{1}{3} \times \frac{a \times a}{2} \times a = \frac{a^3}{6}$.

3) H étant le milieu de $[BC]$, $[OH]$ est la médiane relative à l'hypoténuse du triangle OBC rectangle en O, donc $OH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

(OA) est orthogonale au plan (OBC) donc AOH est rectangle en O.

D'après le théorème de Pythagore : $AH^2 = AO^2 + OH^2$, $AH^2 = a^2 + \frac{2a^2}{4} = \frac{6}{4}a^2$,

$AH = \sqrt{\frac{6a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4) Aire$(ABC) = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{a\sqrt{2} \times a\frac{\sqrt{6}}{2}}{2}$

$= a^2\frac{\sqrt{12}}{4} = a^2\frac{\sqrt{4\times 3}}{4} = a^2\frac{2\sqrt{3}}{4} = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) Soit h la longueur de la hauteur issue de O du tétraèdre $OABC$.

Volume$(OABC) = \frac{1}{3} \times$Aire$(ABC) \times h$,

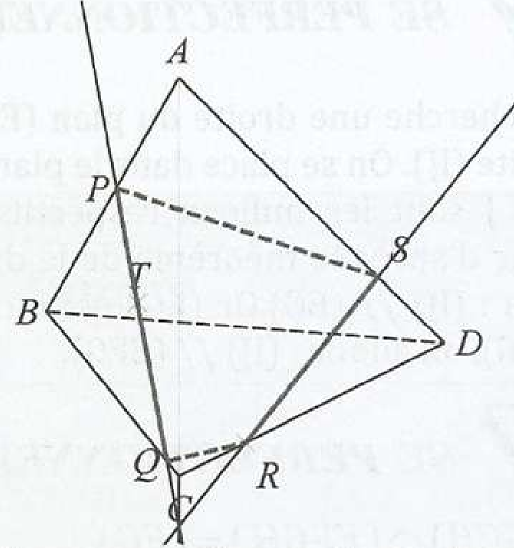
soit $\frac{a^3}{6} = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{2} \times h = a^2\frac{\sqrt{3}}{6} \times h$

donc $h = \frac{a^{\not 3}}{\not a^2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

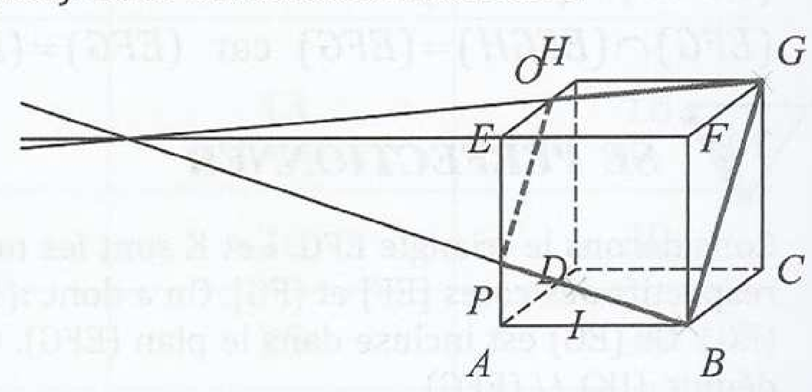


S'ENTRAINER

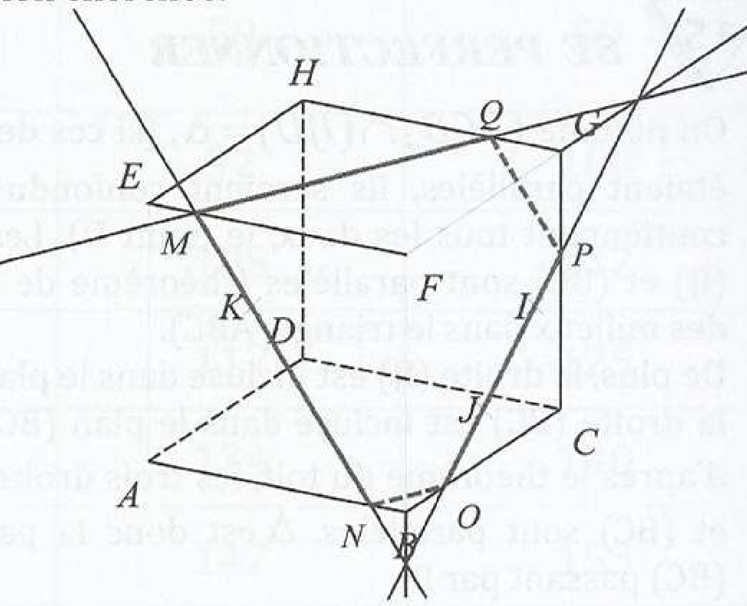
1) $ABCD$ est un tétraèdre, $T \in (ABC)$, $S \in [AD]$ et $R \in [CD]$. Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (RST). $PQRS$ est la section cherchée.



2) $ABCDEFGH$ est un cube, et I est dans la face $ABFE$. Construire la section du cube par le plan (IBG). $BGOP$ est la section cherchée.



3) $ABCDEFGH$ est un cube, I et J sont dans la face $BCGF$, et K est dans la face $ABFE$. Construire la section du cube par le plan (IJK). $MNOPQ$ est la section cherchée.



11 S'ENTRAINER

$(AC) \cap (EFGH) = \varnothing$,

$(BG) \cap (EFGH) = \{G\}$,

$(EF) \cap (EFGH) = (EF)$

car la droite (EF) est incluse dans le plan $(EFGH)$,

$(AB) \cap (EFGH) = \varnothing$,

$(BF) \cap (EFGH) = \{F\}$.



SE PERFECTIONNER

On cherche une droite du plan (EFG) parallèle a la droite (IJ). On se place dans le plan (EBG).
I et J sont les milieux respectifs de [EB] et[BG]. Donc d'après le théorème de la droite des milieux, on a : (IJ) // (EG).Or (EG) est incluse dans le plan (EFG), on adonc : (IJ) // (EFG).



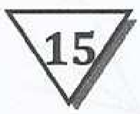
SE PERFECTIONNER

$(FGCB)\cap(EFGH)=(FG)$,
$(EBC)\cap(EFGH)=(EH)$,
$(ABCD)\cap(EFGH)=\varnothing$
$(EFG)\cap(EFGH)=(EFG)$ car $(EFG)=(EFGH)$



SE PERFECTIONNER

Considérons le triangle EFG. I et K sont les milieux respectifs des cotes [EF] et [FG]. On a donc :(IK) // (EG). Or (EG) est incluse dans le plan (EFG). On en déduit :(IK) // (EFG).
De la même façon, on démontre que :(IJ) // (EFG).
(IK) et (IJ) sont deux droites sécantes du plan (IJK).
On a donc :(IJK) // (EFG).



SE PERFECTIONNER

On nomme $(BCD)\cap(IJD)=\Delta$, (si ces deux plans étaient parallèles, ils seraient confondus car ils contiennent tous les deux, le point D). Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles (théorème de la droite des milieux dans le triangle ABC).
De plus, la droite (IJ) est incluse dans le plan (IJD)et la droite (BC) est incluse dans le plan (BCD).Ainsi, d'après le théorème du toit, les trois droites (IJ), Δ et (BC) sont parallèles. Δ est donc la parallèle a (BC) passant par D.



SE PERFECTIONNER

La droite (BD) est incluse dans le plan (BCD) et est coplanaire sécante avec (MN).
On a donc : $(MN)\cap(BCD)=(MN)\cap(BD)=\{I\}$

Sommaire



Kounouz Ennajeh

MATHEMATIQUES

Sections : Scientifiques

Deuxième année de l'enseignement secondaire

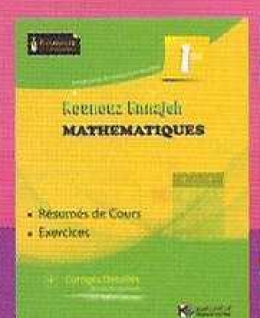
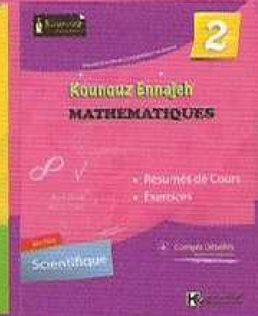
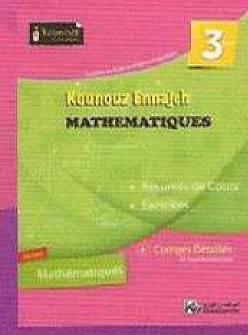
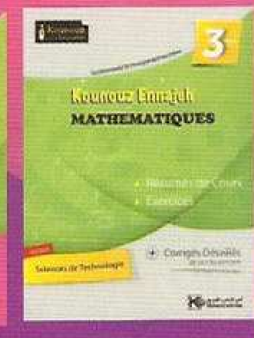
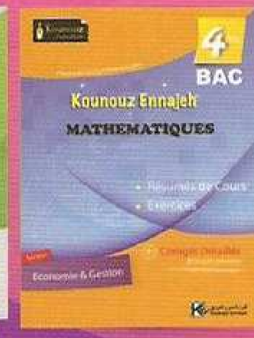


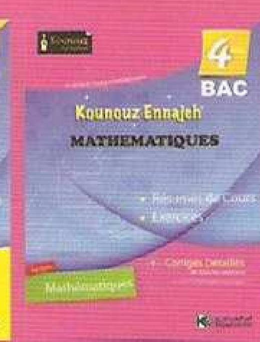
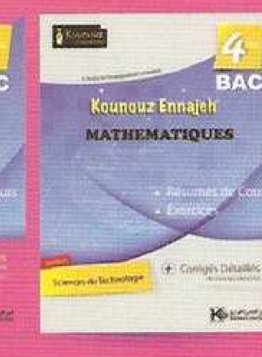
Ce parascolaire s'adresse aux élèves de l'enseignement secondaire. Son principal objectif est de venir en aide aux apprenants. D'ailleurs, le livre se donne les moyens de ses objectifs.

En effet, ce parascolaire se veut un allié de l'apprentissage des mathématiques.
Il allie cours, approfondissement et enrichissement des connaissances. Dans un souci d'efficacité, nous avons délibérément choisi de suivre la démarche et la progression proposées dans le manuel scolaire Par conséquent, les modules présentés vont en parallèle avec ceux du manuel scolaire afin de mieux répondre aux attentes et aux besoins des élèves.
Ainsi, à l'instar du manuel, chaque chapitre s'organise autour de plusieurs activités :

- Résumés du cours
- Exercices
- Corrigés des exercices

Dans la même Collection

كنوز للنشر والتوزيع
KOUNOUZ EDITIONS
www.kounouz-edition.com

Prix : 7.500 DT



ISBN : 978-9938-06-570-1